

VERHANDELINGEN
DER
KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN
WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

DEEL VII
MET 19 PLATEN

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER

April 1901

California Academy of Sciences

Presented by Koninklijke Akademie
van Wetenschappen,
Amsterdam.
January _____, 1907.

VERHANDELINGEN
DER
KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN
WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

DEEL VII
MET 19 PLATEN



AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER


April 1901

13272



INHOUD.

1. S. L. VAN OSS. Das regelmässige Sechshundert-Zell und seine Selbst-deckenden Bewegungen. (Mit 14 Tafeln).
 2. E. MULDER. Over peroxy-zwavelzuur zilver en peroxy-azijnzuur zilver. (6^e Verhandeling).
 3. ALICIA BOOLE STOTT. On certain series of sections of the regular four-dimensional Hypersolids. (With 5 plates).
 4. P. H. SCHOUTE. Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions (Etude de géométrie énumérative).
 5. R. SISSINGH. Propriétés générales des images formées par des rayons centraux traversant une série de surfaces sphériques centrées.
 6. E. MULDER. Over peroxy-azijnzuur zilver en, als vervolg, over peroxy-zwavelzuur zilver. (7^e Verhandeling).
 7. J. M. VAN BEMMELEN. Bijdrage tot de wetenschappelijke biographie van G. J. MULDER. Historisch-kritische beschouwing van zijn werk: „De scheikunde der bouwbare aarde.”
-



Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
California Academy of Sciences Library

Das regelmässige Sechshundertzell und seine
Selbstdeckenden Bewegungen

VON

S. L. VAN OSS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N^o. 1.

(Mit 10 Tafeln.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

December 1899.

Das regelmässige Sechshundertzell und seine Selbstdeckenden Bewegungen

VON

S. L. VAN OSS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N^o. 1.

(Mit 14 Tafeln.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

December 1899.

Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbsdeckenden Bewegungen

VON

S. L. VAN OSS.

Wesentliche Grundlage dieser Arbeit sind die hierbei vorgelegten Projectionen der Tafeln III bis VIII. Die Projectionen der Tafeln I und II wurden schon in meiner Inaugural-Dissertation ¹⁾ publicirt und untersucht. Ich reproducire sie hier in der Meinung, dass ein Überblick über die sämtlichen regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen wohl erwünscht sei, zumehr weil die Punktgruppen der regelmässigen Z^{600} und Z^{120} diejenigen der einfacheren Zelle enthalten. Das zu vergleichende Material liegt also sämtlich vor. Auch die beiden Tafeln IX und X, welche Projectionen des Z^{120} enthalten, lasse ich ausser Betracht. Sie sind nur der Vollständigkeit wegen hinzugefügt worden. Ihre Leistungsfähigkeit bei irgend welcher geometrischen Untersuchung, dieses Gebilde betreffend, ist wohl nicht fraglich. Ohne Weiteres liefern sie die von Herrn P. H. Schoute ²⁾ behandelten räumlichen Projectionen nach den Richtungen der ersten, zweiten und dritten Querlinien, während sie mittels sehr einfacher Constructionen die räumlichen Schnitte senkrecht zu diesen Querlinien zu bestimmen gestatten. Sie sind aus den Z^{600} Projectionen der Tafeln IV und V abgeleitet worden. Ich habe es unterlassen alle den Tafeln III bis VIII entsprechenden Z^{120} -Pro-

¹⁾ Die Bewegungsgruppen der reg. Gebilde von vier Dimensionen 1894.

²⁾ Reg. Schnitte und Projectionen des Z^{120} und Z^{600} Verhandelingen II N^o. 7. 1894.

jectionen zu construiren, weil die beiden an dieser Stelle vorgelegten allerdings hinreichend sind, eine klare Vorstellung des Z^{120} zu vermitteln.

Die Projectionen des Z^{600} wurden mit ausschliesslicher Rücksicht auf die Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen dieses Gebildes angefertigt. Idem sie aber, so zu sagen ungefragt, sich darboten zu Bemerkungen allerlei Art, so habe ich im ersten Abschnitte dieser arbeit eenige Ergebnisse, welche ohne jede Construction aus denselben hervorgehen, zusammengestellt.

I.

1. Die Lage eines Gebildes im Raume von vier Dimensionen ist bestimmt durch seine Projectionen auf die Ebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Von diesen Projectionen sind irgend zwei auf ein Paar normaler Ebenen schon genügend, die Lage anzugeben.

Es seien nun die Ebenen X_1OX_2 , X_2OX_3 , X_3OX_4 , X_4OX_1 , mit den positiven Halbachsen auf die Ebene des Papiers umgeklappt: OX_1 nach unten, OX_2 nach rechts, OX_3 nach oben, OX_4 nach links, es seien weiter A_{12} , A_{34} die Projectionen eines Punktes A auf X_1OX_2 und X_3OX_4 , so lassen sich die Projectionen A_{23} und A_{41} sofort angeben.

Beachtet man nun, dass je zwei nebeneinanderliegende der umgeklappten Ebenen einen Coordinatenraum von drei Dimensionen bestimmen, und dass die Projection eines Punktes auf diesen Raum, durch die Projectionen auf die beiden Ebenen bestimmt wird, so lässt sich das obige System von vier Projectionen nach Belieben auch als die Projectionen auf die vier Coordinatenräume betrachten.

Nach diesem Prinzip habe ich nach den Angaben Puchta's ¹⁾ die Projectionen der Tafel III gezeichnet, und durch Drehung und Doppeldrehung um X_2OX_3 und X_4OX_1 die übrigen Z^{600} -Projectionen hergeleitet. (Ich bin der Puchta'schen Bezeichnung nicht gefolgt, weil es mir zweckmässiger erschien, je zwei diametral gegenübereinanderliegende Ecken durch gleiche positive und negative Zahlen zu bezeichnen).

¹⁾ Wiener Sitzungsberichte. Bd. 95. 1887.

2. Aus irgend welchem dieser Projectionensysteme lässt sich die folgende Übersicht über das Z^{600} herleiten.

Die Ecken des Zelles liegen, regelmässige Punktgruppen um irgend eine Hauptdiagonale bildend, in sieben zu dieser Diagonale normalen Räumen. So liegen z. B. um die Diagonale 1-1 herum:

2	—	13	in einer Ikosaedergruppe	I_1
14	—	33	„ „ Dodekaeder	„ D
34	—	45	„ „ Ikosaeder	„ I_2
46	—	-46	„ „ Ik. Dod.	„ (ID)
-45	—	-34	„ „ Ikosaeder	„ I_2'
-33	—	-14	„ „ Dodekaeder	„ D'
-13	—	-2	„ „ Ikosaeder	„ I_1'

Diese Punktgruppen liegen alle ähnlich, bezw. reciprok zu einander.

Diese Ecken sind auf folgende Weise durch Kanten verbunden:

180	{	Die Kanten des I_1 , D , (ID) , D' , I_1' sind Kanten des Zelles.
60		Von 1 aus gehen 12 Kanten nach den Ecken des I_1 ; die ähnlich liegenden Ecken von I_1 , I_2 , I_2' , I_1' sind nach der Reihe mit einander verbunden, und die Ecken des I_1' mit -1 .
2 \times 120	{	Die Ecken je einer Seitenfläche des D (D') sind verbunden mit den zu dieser Fläche reciprok liegenden Ecken des I_1 und I_2 . (I_1' und I_2').
2 \times 60		Die Ecken je einer I -Fläche des (ID) sind verbunden mit der zu dieser Fläche reciproken Ecke des D und des D' .
2 \times 60	{	Die Ecken je einer D -Fläche des (ID) sind verbunden mit der zu dieser Fläche reciproken Ecke des I_2 und des I_2' .

Die 600 Seitentetraeder liegen wie folgt:

2 × 20	Tetraeder von 1 und -1 nach den Seitenflächen des I_1 und des I_1' .
2 × 20	„ „ den Ecken des D und des D' nach den Sfl. des I_1 und des I_1' .
2 × 20	„ „ „ „ „ „ D „ „ D' „ „ I -Fl. „ (ID) .
2 × 30	„ „ „ Kanten „ D „ „ D' „ „ Kanten des I_1 und des I_1' .
5 × 12	„ „ „ Verbindungen I_1 I_2 „ „ „ „ D .
5 × 12	„ „ „ „ „ „ I_2 I_2' „ „ „ „ (ID) .
5 × 12	„ „ „ „ „ „ I_2' I_1' „ „ „ „ D' .
2 × 120	„ „ „ Ecken des I_2 und des I_2' „ „ Flächen welche (ID) mit D und mit D' verbinden.

3. Betrachten wir die vorliegenden Projectionensysteme aus dem Gesichtspunkte, dass je zwei nebeneinanderliegende Projectionen die Projection auf einen Coordinatenraum bestimmen, so fällt es auf, dass die Tafeln III, IV und V gerade die von Prof. Schoute behandelten regelmässigen Projectionen liefern:

Die linke, wie die untere Hälfte der Tafel IV und der Tafel V liefern die Projection des Z^{600} in der Richtung einer Hauptdiagonale D .

Die rechte, wie die obere Hälfte der Tafel V liefern die Projection in der Richtung einer ersten Querlinie Q_1 .

Die rechte, wie die obere Hälfte der Tafel IV liefern die Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie Q_2 .

Irgend welche Hälfte der Tafel III liefert die Projection in der Richtung einer dritten Querlinie Q_3 .

Bezeichnen wir mit d, q_1, q_2 die Hauptdiagonalen und Querlinien des Gebildes I_1 und mit s den Schnitt zweier Seitenflächen desselben, die in einer Ecke, doch nicht in einer Kante zusammenstossen, so ist leicht zu sehen, dass:

$D \pm 56$	parallel ist zu q_1 (4 12) (7 9)
$Q_1 \pm (34 -45)$	„ „ „ d 2 13
$Q_2 \pm (58 59 -51)$	„ „ „ q_2 (5 6 8) (3 10 11).
$Q_3 \pm (34 48 49 -45)$	„ „ „ s (3 7 10) (3 4 11).

Die Projection des Z^{600} in den Richtungen der D bzw. der Q_1, Q_2, Q_3 gehen also aus dem Zelle hervor, wenn man die um eine Diagonale herumliegenden Gebilde $I_1, D, I_2, (ID), I_2', D', I_1'$ ersetzt durch ihre Projectionen in den Richtungen der q_1 , bzw. der d, q_2, s .

4. Ein anderes Problem, das zu den Projectionen der Tafel III in naher Beziehung steht, ist die Construction eines Schlegelschen Modelles.

Bekanntlich beansprucht das Modell des Brill'schen Verlags nicht, ein treues Abbild eines *regelmässigen* Z^{600} zu sein. Schon aus der Projection in der Richtung einer Q_3 , welche als ein besonderer Fall des Schlegelschen Modelles betrachtet werden kann, geht hervor, dass die inneren „Drahtkörper“, wie das äussere, eine tetraedrische Symmetrie zeigen sollten. Um dies deutlich zu machen, habe ich, aus der Tafel III die den inneren Drahtkörpern entsprechenden Gebilde herausgenommen und in der Tafel III^a besonders gezeichnet. Wenn auch diese nicht den Drahtkörpern einer centralen Pro-

jection ähnlich sind, so kommen sie doch, was ihre Symmetrie betrifft mit denselben überein, und setzen genügend in 's Licht, wie sehr das jetzige Modell von einer centralen Projection eines *regelmässigen* Z^{600} abweicht.

Es wäre eine geringe Mühe aus den Projectionen der Tafel III eine centrale Projection abzuleiten. Es würde sich dann empfehlen das Projectionscentrum in der umgeschriebenen Hypersphär zu nehmen. Es werden dann die Projectionen aller in Kreisen liegenden Ecken wieder in Kreise fallen. Normale Kreispaaire werden in einer solchen Projection zu conjugirten Kreispaairen ¹⁾ u. s. w. Das Modell würde ein Gerüste von 36 conjugirten Paaren von Zehneckern zeigen, welche sich zu je sechs in den 120 Ecken schneiden. (Man vergleiche II 4).

Vielleicht wäre es am zweckmässigsten das Projectionscentrum in einer Ecke zu wählen. Das Modell würde alsdann eine ikosaedrische Symmetrie erhalten. Die Ecken der oben erwähnten Gebilde $I_1, D_1, I_2, (ID), I_2', D', I_1'$ würden sich in concentrische Schichten Lagern, und zugleich mit dem Erlangen der Vortheile einer stereographischen Projection, würde der Übelstand des jetzigen Modelles, dass die Drahtkörper Abbildungen von in gebrochenen Räumen liegenden Gebilden sind, vermieden.

¹⁾ Zwei Kreise welche bezüglich einander so liegen, dass jeder Kugel durch einen derselben von den andern normal geschnitten wird, heissen conjugirt. Über die Bedeutung solcher Kreispaaire für die Abbildung der Bewegungen im vierdimensionalen Räume auf den dreidimensionalen, sieh E. Goursat: Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. Annales de l'École normale supérieure t. 6 1889. In dieser Arbeit werden alle endlichen Gruppen der orthogonalen Substitutionen von vier Variablen aufgezählt.

Über Drehungen und Doppeldrehungen um ein Paar conjugirter Kreise sieh des Verfassers Aufsatz in Nieuw Archief IV 1898.

II.

1. Zu der Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen des Z^{600} schicken wir die folgenden Prinzipien voraus:

Eine einfache Drehung um eine Ebene lässt die Projection auf diese Ebene ungeändert, während sie in der Projection auf die normale Ebene eine Drehung hervorbringt.

Eine Doppeldrehung um ein Paar normaler Ebenen erzeugt in den beiden Projectionen auf dieselben eine Drehung um den gemeinsamen Punkt.

Wenn die Substitution der Ecken, welche einer selbstdeckenden Drehung der einen Projection entspricht, die andere, zu dieser normale, gänzlich ungeändert lässt, so entspricht dieser Substitution eine selbstdeckende einfache Rotation des projecirten Gebildes.

Bringt die erwähnte Substitution auch eine Drehung in der normalen Projection hervor, so ist die erzeugende Bewegung eine selbstdeckende Doppeldrehung.

Ist aber die Substitution, welche einer selbstdeckenden Drehung in der einen Projection entspricht, in der andern weder identisch noch einer Drehung acquiralent, so entspricht derselben keine selbstdeckende Bewegung des projecirten Gebildes.

Zu jeder selbstdeckenden Bewegung eines Gebildes gehört eine oder gehören ein Paar regelmässiger Projectionen. Umgekehrt wird die Kenntniss aller regelmässigen Projectionen zu der Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen führen.

Es ist hierbei zu bemerken, dass eine Doppeldrehung, deren beide Componente einander gleich sind, oder, wie diese von Herrn W. A. Wythoff ¹⁾ genannt wurde, eine *gleichschenklige* Doppeldrehung, zu einer unendlichen Anzahl normaler Ebenenpaare, und desshalb auch zu einer unendlichen Anzahl regelmässiger Projectionen gehört. Wir werden aber im Folgenden sehen, dass die vorliegenden Projectionen gerade diejenige sind, welche zu der Bestimmung der selbstdeckenden Bewegungen des Z^{600} und des Z^{120} nötig sind.

¹⁾ W. A. Wythoff. De Biquaternion als Bewerking in de ruimte van vier afmetingen. Diss. Amsterdam 1898.

2. Tafel III.

Die Projectionsebenen ¹⁾ enthalten, je nach dem Schema $D Q_2 Q_1 Q_3 Q_1 Q_2 D Q_2 Q_1 Q_3 Q_1 Q_2$, zwei Hauptdiagonalen, vier erste, vier zweite, und zwei dritte Querlinien, zu normalen Paaren angeordnet. Sie schneiden acht Seitenflächen und vier Seitenteetraeder.

Die Ebene $X_3 O X_4$, zum Beispiel, geht durch die Ecke 1, durch den Mittelpunkt der Seitenfläche 1412, durch die Mitte der Kante 4 12, durch den Mittelpunkt des Tetraeders 4 12 23 25, u. s. w.

Indem also jede Ebene, zu welcher eine Projection wie die vorliegende gehört, zugleich 8 Seitenflächen normal in zwei symmetrische Teile zerlegt, oder vier Tetraeder normal in einer ersten Querlinie desselben schneidet, ergibt sich für die Anzahl solcher Ebenen $\frac{1200}{8} \times 3$ oder $\frac{600}{4} \times 3 = 450$. Diese Ebenen sind zu 225 normalen Paaren angeordnet.

Wenn man das System dieser Projectionen mit den quadratischen Projectionen des Z^{24} (Tafel II) vergleicht, so sieht man unmittelbar, dass die Z^{600} -Ecken $\pm (1\ 56\ 46\ 51\ 15\ 17\ 21\ 33\ 18\ 22\ 26\ 30)$ eine Z^{24} -Punktgruppe bilden. Indem es nun 9 Ebenenpaare gibt, auf welche das Z^{24} sich so projectirt, so ergibt sich für die Anzahl solcher Punktgruppen im Z^{600} : $\frac{225}{9} = 25$. Selbstredend gibt es dann 75 Z^8 - und Z^{16} -Punktgruppen (vgl. Tafel I).

Die Projectionen der Ecken sind in neun Kreisen quadratisch angeordnet, der nte Kreis, von aussen ab gezählt, irgend einer Projection, entspricht dem nten von innen ab gezählten der zu dieser normalen Projection. Die Projectionen der Ikosaeder, in deren Ecken die von den Zellecken ausgehenden Kanten enden, zeigen sich daher in neun verschiedenen Formen.

Die Ecken, deren Projectionen auf eine Ebene zu zweien zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf der normalen Ebene in bezüglich dem Mittelpunkt gegenüberliegenden Punkten. Die Ecken, deren Projectionen auf eine Ebene zu vierten zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken eines Quadrats.

Eine Substitution der Ecken, die einer Drehung $1/2$ irgend einer der vier Projectionen entspricht, lässt entweder die normale Pro-

¹⁾ Hier wie in der Folge wird der Coordinatenursprung im Zellmittelpunkt gedacht.

jection ungeändert, oder sie bringt auch in letzterer die Drehung $\frac{1}{2}$ hervor. Hieraus folgt dass die einfache Drehung $\frac{1}{2}$ und die Doppeldrehung $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ zu der Bewegungsgruppe des Z^{600} gehören.

Eine Substitution der Ecken, welche einer Drehung $\frac{1}{4}$ irgend einer Projection entspricht, kann nur dann eine Operation der Z^{600} Gruppe sein, wenn sie auch eine Drehung $\frac{1}{4}$ in der normalen Projection erzeugt:

Erteilen wir z. B. der Projection auf $X_3 OX_4$ die Drehung $(\frac{1}{4})_{34}$. Dieser Drehung entsprechen sehr viele Substitutionen der Ecken; aber nur zwei derselben sind selbstdeckenden Bewegungen aequivalent, nämlich: $(1 \ 56 \ -1 \ -56) (51 \ 46 \ -51 \ -46) (2 \ 60 \ -2 \ -60) \dots$ und $(1 \ 56 \ -1 \ -56) (51 \ -46 \ -51 \ 46) (2 \ -57 \ -2 \ 57) \dots$. Die erste entspricht der Doppeldrehung $(\frac{1}{4})_{34} (\frac{1}{4})_{21}$, die zweite der Doppeldrehung $(\frac{1}{4})_{34} (\frac{1}{4})_{12}$.

Zu jedem der 225 Ebenenpaare gehören also die folgenden Operationen der Z^{600} Gruppe:

2 einfache Drehungen	$\frac{1}{2}$
4 Doppeldrehungen	$\frac{1}{4} \ \frac{1}{4}$
1 Doppeldrehung	$\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}$
1 identische Operation.	

Zu der Aufzählung der sämtlichen zu diesen Ebenenpaaren gehörigen Operationen ist zu bemerken, dass die Doppeldrehungen $\frac{1}{4} \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ solche sind, zu welchen eine unendliche Anzahl von Trägern gehört. Es erhebt sich also die Frage, ob diese wohl alle von einander verschieden seien, und, wenn nicht, wie viele der 225 Ebenenpaare zugleich als Träger einer einzigen Doppeldrehung auftreten? Nun leuchtet ein, dass eine Substitution der Ecken, welche einer Doppeldrehung $\frac{1}{4} \frac{1}{4}$ aequivalent ist, aus 30 Cykeln, je von vier Elementen, besteht. Jeder Cykel entspricht einer Drehung $\frac{1}{4}$ einer der 450 Ebenen in sich selbst; es bewegen sich also jedesmal 15 Paare in sich selbst, und es gibt, also nur $\frac{225}{15} \times 4 = 60$ unter einander verschiedene Doppeldrehungen $\frac{1}{4} \frac{1}{4}$.

Die Doppeldrehung $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ vertauscht je zwei diametral-gegenüberliegende Ecken; es ist also ganz gleichgültig, welches Ebenenpaar man als Träger betrachtet. Diese Operation kommt, wie die identische, nur einmal in der Gruppe vor.

Die zu den sämtlichen 225 Ebenenpaaren gehörigen Operationen der Z^{600} Gruppe sind also:

450 einfache Drehungen	$\frac{1}{2}$	
60 Doppeldr.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1 „	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1 identische Operation.		

3. Tafel IV.

Durch geeignete Doppeldrehung um $X_1 O X_2$ und $X_3 O X_4$ lässt sich das Z^{600} der vorigen Tafel in eine solche Lage bringen, dass die Seitenfläche 34 46 -54 zu der Ebene $X_2 O X_3$ parallel wird; zugleich werden dann auch die Seitenflächen 39 52 -44, 41 -36 -55, u. s. w. parallel, und 5 6 8, 3 10 11, 51 58 59 u. s. w. normal zu dieser Ebene. Die Projectionen auf $X_1 O X_4$ und $X_2 O X_3$ werden dann, wie es die Figur zeigt, regelmässig-sechseckig.

Die letztgenannten Projectionsebenen enthalten je abwechselnd 3 Hauptdiagonalen und 3 zweite Querlinien; sie sind zu sechs Seitenflächen parallel und schneiden eine gleiche Anzahl derselben normal in ihren Mittelpunkten. Es gibt also $\frac{1200}{6} = 200$ Ebenen, zu 100 normalen Paaren auf welche das Z^{600} sich regelmässig-sechseckig projectirt.

Die Ecken, deren Projectionen auf die eine Ebene zu dreien zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken eines regelmässigen Dreiecks. Die Ecken, deren Projectionen auf die eine Ebene zu sechsen zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken eines regelmässigen Sechsecks.

Es gibt eine Substitution der Ecken, welche eine Drehung $\frac{1}{3}$ in der einen sechseckigen Projection erzeugt, während sie in der zu dieser normalen Projection keine Änderung hervorruft. Hieraus folgt, dass die entsprechende einfache Drehung $\frac{1}{3}$ eine selbstdeckende Zellbewegung ist. Weil die Bewegungen um zwei normale Ebenen von einander unabhängig sind, so ist auch die Doppeldrehung $\frac{1}{3} \frac{1}{3}$ eine Operation der Z^{600} Gruppe. Stellt man diese Bewegungen mit der Operation $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ zusammen, so erfolgen noch die Doppeldrehungen $\frac{1}{2} \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{6} \frac{1}{6}$.

Die zu einem Paare 6-eckiger Projectionen gehörige Untergruppe der Z^{600} -Gruppe besteht also aus den folgenden Operationen:

aus 4 einfachen Drehungen	$\frac{1}{3}$	
4 Doppeldrehungen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4 „	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

4 Doppeldrehungen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1 „	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1 identischer Operation.		

Die Doppeldrehungen $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ sind aber nur zum Teil unter einander verschieden. Bei jeder dieser Bewegungen bewegen sich 10 der 100 Ebenenpaare in sich selbst; es ist deshalb nur der zehnte Teil untereinander verschieden.

Die sämtlichen zu den 100 Ebenenpaaren gehörigen Operationen der Z^{600} Gruppe sind also:

400 einfache Drehungen	$\frac{1}{3}$	
400 Doppeldrehungen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
40 „	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
40 „	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ausser der schon oben bestimmten Operation $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ und der identischen Operation.

4. Tafel V.

Aus der vorigen Lage wird das Z^{600} durch eine einfache Drehung um $X_3 O X_4$ mit der Kante 1 2 in die Ebene $X_2 O X_3$ gebracht. Die Projectionen auf diese Ebene und auf $X_1 O X_4$ gestalten sich dann, wie es die Figur zeigt, regelmässig-zehneckig.

Man sieht unmittelbar, dass diese Projectionsebenen je zehn Kanten enthalten, welche ein regelmässiges Zehneck bilden. Zugleich ergibt sich für, die Kantenlänge a_{600} der Wert $\frac{1}{2} R \sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Die Anzahl solcher Projectionsebenen ist $\frac{720}{10} = 72$, zu 36 normalen Paaren.

Hieraus folgt, das eine Hypersphär regelmässig umspinnen wird von 72 Kreisen zu 46 normalen Paaren, welche sich zu je sechs in den Ecken regelmässiger Zehneck schneiden.

Die Ecken, deren Projectionen auf die eine Ebene zu je fünf zusammenfallen, haben ihre Projectionen auf die normale Ebene in den Ecken regelmässiger Fünfecke, während die zehn äusseren Ecken der einen Projection den im Mittelpunkte der anderen zusammenliegenden entsprechen.

Die Drehung der Periode 5 irgend einer der zehneckigen Projectionen ergibt sich als einer selbstdeckenden einfachen Drehung des Z^{600} entsprechend.

Die Combination dieser einfachen Drehungen untereinander und mit der Operation $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ erzeugt die zu jedem der 36 Ebenenpaare gehörige Untergruppe, welche aus den folgenden Operationen besteht:

4	einf. Drehungen	$\frac{1}{5}$
4	„ „	$\frac{2}{5}$
4	Doppeldrehungen	$\frac{1}{10} \frac{1}{2}$
4	„	$\frac{3}{10} \frac{1}{2}$
8	„	$\frac{1}{5} \frac{2}{5}$
8	„	$\frac{3}{10} \frac{1}{10}$
4	„	$\frac{1}{10} \frac{1}{10}$
4	„	$\frac{1}{5} \frac{1}{5}$
4	„	$\frac{3}{10} \frac{3}{10}$
4	„	$\frac{2}{5} \frac{2}{5}$
1	„	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$
1	identischer Operation.	

Es lässt sich nun aus der Figur leicht nachweisen, dass bei jeder der gleichschenkligen Doppeldrehungen der Perioden 5 und 10 sechs gleichberechtigte normale Ebenenpaare sich in sich selbst bewegen. Bei der Aufzählung der sämtlichen zu den 36 Ebenenpaaren gehörigen Operationen sind diese also nur mit dem sechsten Teil in Rechnung zu bringen.

Man erhält also:

144	einf. Drehungen	$\frac{1}{5}$
144	„ „	$\frac{2}{5}$
144	Doppeldrehungen	$\frac{1}{10} \frac{1}{2}$
144	„	$\frac{3}{10} \frac{1}{2}$
288	„	$\frac{1}{5} \frac{2}{5}$
288	„	$\frac{1}{10} \frac{3}{10}$
24	„	$\frac{1}{10} \frac{1}{10}$
24	„	$\frac{1}{5} \frac{1}{5}$
24	„	$\frac{3}{10} \frac{3}{10}$
24	„	$\frac{2}{5} \frac{2}{5}$

Ausser der Operation $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ und der identischen.

5. Es ist leicht zu sehen, dass wir zu der Construction der bisher betrachteten regelmässigen Projectionen des Z^{600} geführt wurden durch die Erkenntnis, dass in der Gruppe des Z^{600} Ikosaedergruppen enthalten sind. Dass es noch mehr regelmässige ebene

Projectionen geben muss, zeigt sich schon daraus, dass die durch jene bestimmten Operationen die Gruppe, welche offenbar von der Ordnung 7200 ist, noch nicht erschöpfen.

Die Anwendung der folgenden Sätze, deren Beweis ich unterdrücke, wird uns die Construction der übrigen regelmässigen Projectionen ermöglichen.

I. Es gibt zwei Systeme, je von ∞^2 Ebenen, deren beide Winkel, welche sie mit jeder einzelnen der Ebenen eines normalen Paares α bilden, gleich sind.

II. Eine gleichschenklige Doppeldrehung um α herum erzeugt in allen Ebenen *eines* dieser Systeme eine Bewegung in sich selbst. Wenn man den Drehungssin *einer* der Componenten umkehrt, so bewegen sich die Ebenen des andern Systems in sich selbst.

III. Wenn die Ebenen eines normalen Paares α mit den Ebenen eines normalen Paares β *ungleiche* Winkel bilden, so gibt es zwei normale Ebenenpaare γ und δ , deren Ebenen mit denen der erstgenannten Paare zwei *gleiche* Winkel bilden.

Es seien $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2, \delta_1 \delta_2$ die Ebenen der Paare $\alpha \beta \gamma \delta$. Der Doppelwinkel $(\alpha_1 \beta_1)$ sei φ, ψ ; so ist:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \gamma_1) &= (\alpha_2 \gamma_2) = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad \frac{\varphi + \psi}{2} & ; & (\beta_1 \gamma_1) = (\beta_2 \gamma_2) = \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad \frac{\varphi - \psi}{2} & ; \\ (\alpha_1 \delta_1) &= (\alpha_2 \delta_2) = \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad \frac{\varphi - \psi}{2} & ; & (\beta_1 \delta_1) = (\beta_2 \delta_2) = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad \frac{\varphi + \psi}{2} & ; \\ (\alpha_1 \gamma_2) &= (\alpha_2 \gamma_1) = \frac{\varphi + \psi + \pi}{2}, \quad \frac{\varphi + \psi + \pi}{2} & ; & (\beta_1 \gamma_2) = (\beta_2 \gamma_1) = \frac{\varphi - \psi + \pi}{2}, \quad \frac{\varphi - \psi + \pi}{2} & ; \\ (\alpha_1 \delta_2) &= (\alpha_2 \delta_1) = \frac{\varphi + \psi + \pi}{2}, \quad \frac{\varphi + \psi + \pi}{2} & ; & (\beta_1 \delta_2) = (\beta_2 \delta_1) = \frac{\varphi + \psi + \pi}{2}, \quad \frac{\varphi + \psi + \pi}{2} & . \end{aligned}$$

IV. Wenn zu den obigen Ebenenpaaren α und β die beiden (rechts- und links-) gleichschenkligen Doppeldrehungen der Periode p , bzw. der Periode q gehören, so ist jedes der Paare γ und δ Träger einer *ungleichschenkligen* Doppeldrehung, deren Periode das kleinste Multiplum von p und q ist.

Aus diesen Sätzen folgt unmittelbar, dass es noch regelmässige 12-, 20- und 30-seitige Projectionen geben muss; und zwar:

$$\begin{array}{rclcl} 2 \times 15 \times 10 & \text{normale Paare} & 12\text{-seitiger,} \\ 2 \times 15 \times 6 & \text{,,} & \text{,,} & 20 & \text{,,} \\ 2 \times 10 \times 6 & \text{,,} & \text{,,} & 30 & \text{,,} \end{array}$$

Demn bezüglich der Doppeldrehungen $\frac{1}{4} \frac{1}{4}$ sind von den 225 Ebenenpaaren, zu welchen sie gehören, nur 15 als untereinander nicht identisch zu rechnen; ebenso reducirt sich die Anzahl der regelmässig-sechseitigen Projectionen bezüglich der Doppeldrehungen $\frac{1}{6} \frac{1}{6}$ auf 10, und die regelmässig-zehneitigen bezüglich der Doppeldrehungen $\frac{1}{10} \frac{1}{10}$ auf 6.

6. Nach diesen Prinzipien habe ich die Tafeln VI, VII und VIII so construiert, dass alle von diesen abzulesenden *gleichschenkligen* Doppeldrehungen gerade diejenigen sind, welche die Tafeln III, IV und V schon zeigten.

Der Complicirtheit der neuen Projectionen wegen, sind in diesen Tafeln nur die Ecken des Z^{600} angegeben worden; von den Kanten sind nur solche gezeichnet, welche nötig waren zur Angabe der verschiedenen Projectionenformen der Ikosaeder, auf welche die in einer Ecke zusammenstossenden Seitentetraeder sich stützen. Die Tafeln VI^a VII^a und VIII^a zeigen die neuen Projectionen in pleno.

7. Tafel VI.

Die Ecken der 12-seitigen Projectionen sind in sieben Kreisen angeordnet. Der Mittlere und die zweiten Punktkreise, von innen wie von aussen her gerechnet, sind doppelt. Die 48 Ecken welche sich auf diesen zweiten Punktkreis projiciren, bilden zwei Z^{24} -Punktgruppen. (Man vergleiche die r -12-seitigen Z^{24} -Projectionen der Tafel II). Indem nun die Z^{600} Ecken 25 solcher Punktgruppen enthalten, und ein Z^{24} sich auf 24 normale Ebenenpaare regelmässig-12-seitig projicirt ¹⁾, so folgt auch hieraus, dass es $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ normale Ebenenpaare gibt, zu welchen regelmässig-12-seitige Z^{600} -Projectionen gehören.

Diese 300 Ebenenpaare bestimmen ausser den schon früher aufgezählten gleichschenkligen Doppeldrehungen der Perioden 2, 3, 4 und 6:

$$300 \times 4 = 1200 \text{ Doppeldrehungen } \frac{1}{12} \frac{5}{12}.$$

8. Tafel VII.

Die 180 Paare r -20-seitiger Projectionen bestimmen ausser den schon aufgezählten gleichschenkligen Doppeldrehungen der Perioden 2, 4, 5 und 10:

¹⁾ S. des Verfassers. Dissertation.

$180 \times 4 = 720$	Doppeldrehungen	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$
$180 \times 4 = 720$	„	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$

9. Tafel VIII.

Die 120 Paare r -30-seitiger Projectionen bestimmen ausser den schon aufgezählten gleichschenkligen Doppeldrehungen der Perioden 2, 3, 5, 6 und 10:

120	\times	4	Doppeldrehungen	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{30}$
120	\times	4	„	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
120	\times	4	„	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$
120	\times	4	„	$\frac{7}{30}$	$\frac{13}{30}$

Hiermit sind die 7200 Operationen der $Z^{600/120}$ -Gruppe alle aufgezählt.

10. Recapitulation.

Es gibt	225	normale	Paare	reg	4-seitiger	Projectionen	P_4
„	100	„	„	„	6	„	P_6
„	36	„	„	„	10	„	P_{10}
„	300	„	„	„	12	„	P_{12}
„	180	„	„	„	20	„	P_{20}
„	120	„	„	„	30	„	P_{30}

Diese bestimmen die 7200 Operationen der $Z^{600}/_{420}$ -Gruppe wie folgt:

	P_4	
450	Operationen	II
	P_6	
400	„	$\frac{1}{3}$
400	„	$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$
	P_{10}	
144	„	$\frac{1}{5}$
144	„	$\frac{2}{5}$
144	„	$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{2}$
144	„	$\frac{3}{10} \quad \frac{1}{2}$
288	„	$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5}$
288	„	$\frac{1}{10} \quad \frac{3}{10}$

	P_{12}	
1200	Operationen	$1/12 \quad 5/12$
	P_{20}	
720	„	$1/20 \quad 9/20$
720	„	$3/20 \quad 7/20$
	P_{30}	
480	„	$1/30 \quad 11/30$
480	„	$1/15 \quad 4/15$
480	„	$2/15 \quad 7/15$
480	„	$7/30 \quad 13/30$
	$P_4 \quad P_{12} \quad P_{20}$	
60	„	$1/4 \quad 1/4$
	$P_6 \quad P_{12} \quad P_{30}$	
40	„	$1/6 \quad 1/6$
40	„	$1/3 \quad 1/3$
	$P_{10} \quad P_{20} \quad P_{30}$	
24	„	$1/10 \quad 1/10$
24	„	$1/5 \quad 1/5$
24	„	$3/10 \quad 3/10$
24	„	$2/5 \quad 2/5$
	$P_4 \quad P_6 \quad P_{10} \quad P_{12} \quad P_{20} \quad P_{30}$	
1	„	$1/2 \quad 1/2$
1 identische	„	1.

11. Erzeugung der Gruppe.

Wir bezeichnen mit I die Ikosaedergruppe, welche den Punkt 1, mit I' die welche den Punkt 56 in sich selbst überführt, und behaupten: Die Z^{600} -Gruppe wird durch die Combination der Gruppen I und I' erzeugt. Denn man kann immer die Operationen $I_j \quad I'_k \quad I_l$ derart wählen dass ihre Combination $I_j \quad I'_k \quad I_l$ einer beliebigen Operation der Z^{600} -Gruppe acqivalent ist. (Sich Tafel III).

Bezeichnen wir weiter mit V eine der beiden Doppeldrehungen, welche 1 in 56 überführen, so ist $I' = V^{-1} I V$; und es sei $I'_k = V^{-1} I_k V$. Die Operationen der Z^{600} -Gruppe sind also enthalten in der Formel $I_j \quad V^{-1} I_k \quad V I_l$.

132/2

Bemerken wir schliesslich, dass die Ikosaederoperationen enthalten sind in der Formel: (Sich Klein's Vorlesungen ü. d. Ikosaeder)

$$S^\alpha T^\beta S^\gamma U^\delta \quad \alpha, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \beta, \delta = 0, 1$$

$$S^5 = T^2 = (ST)^3 = U^2 = 1, \quad U = S^2 T S^3 T S^2 T,$$

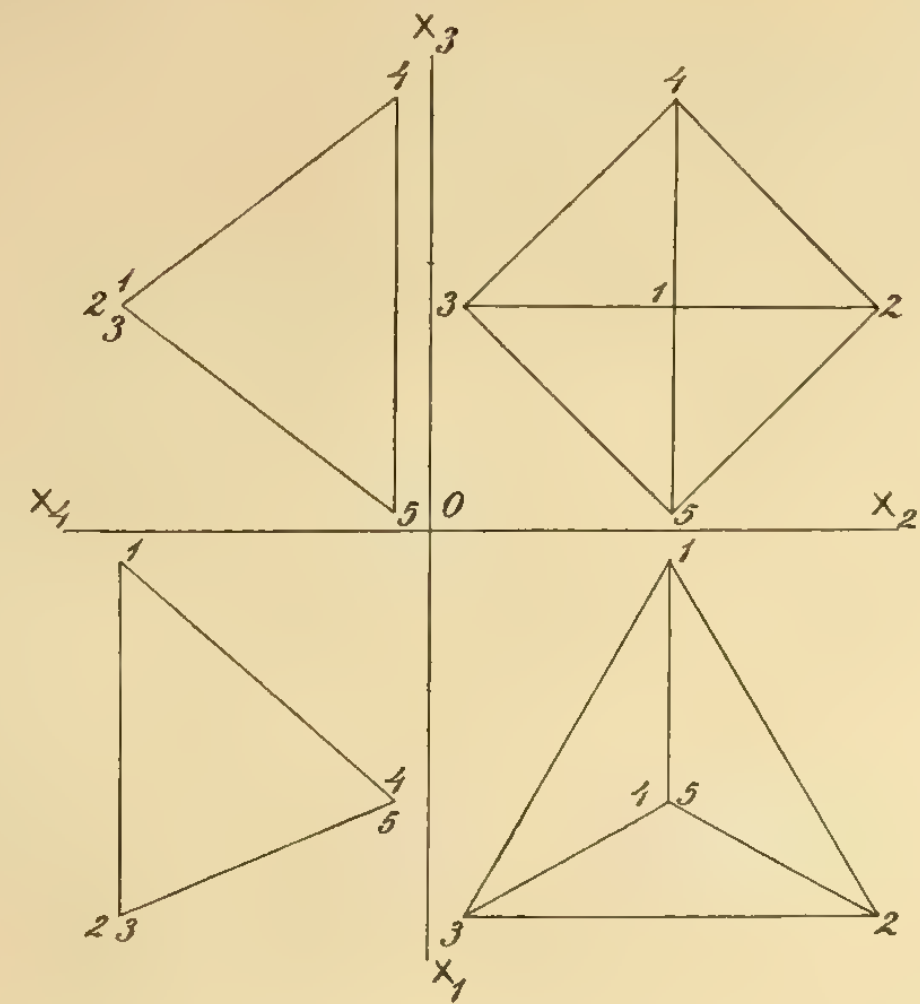
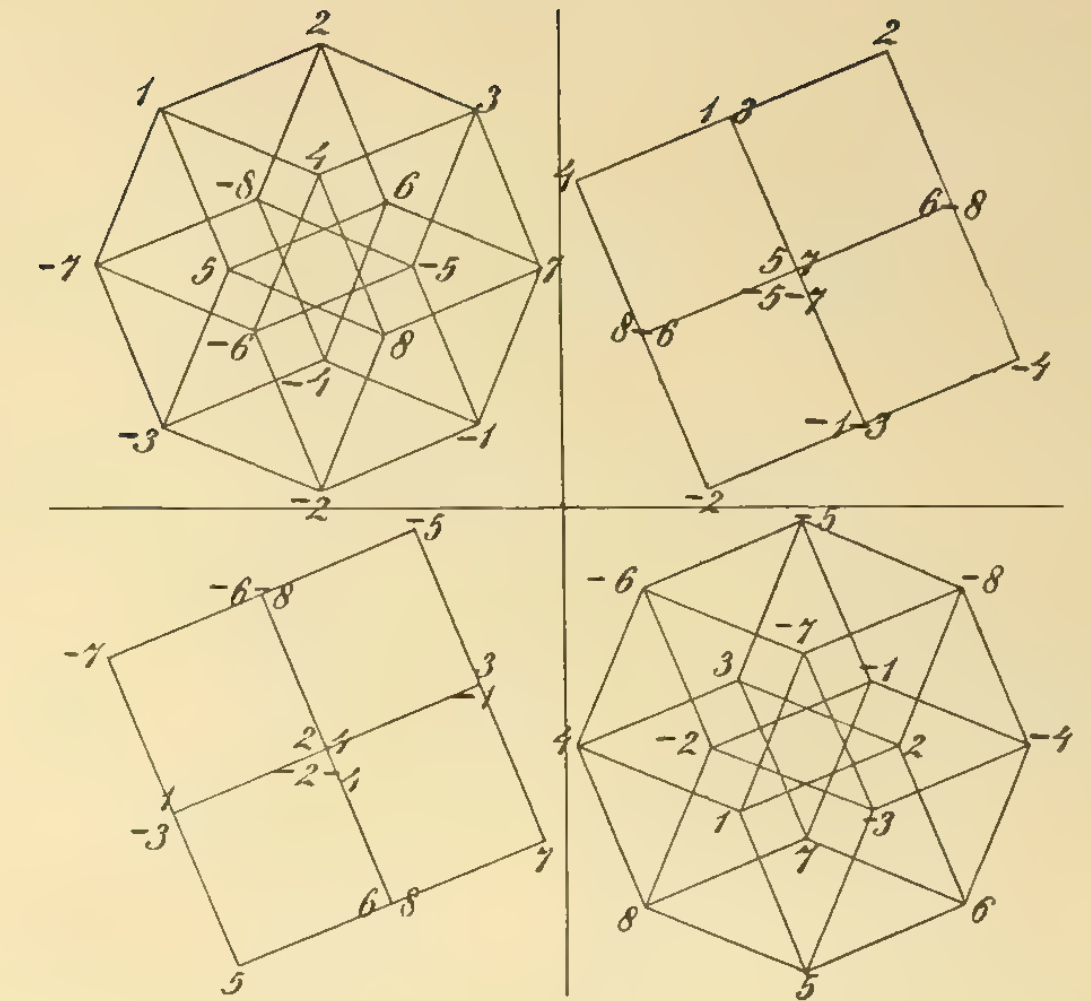
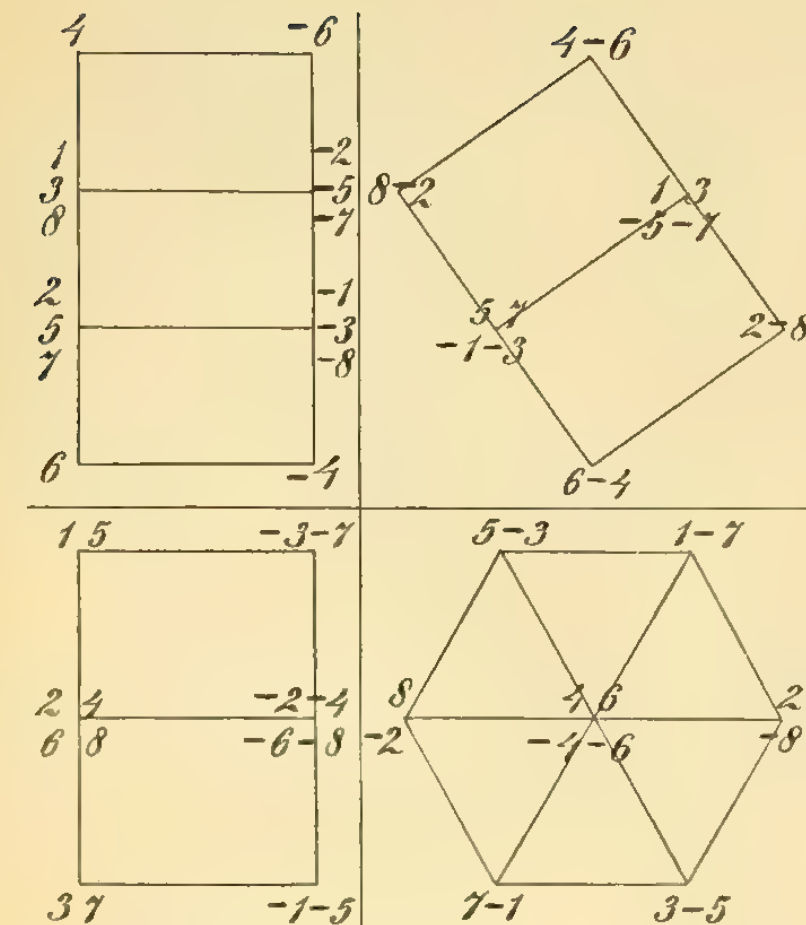
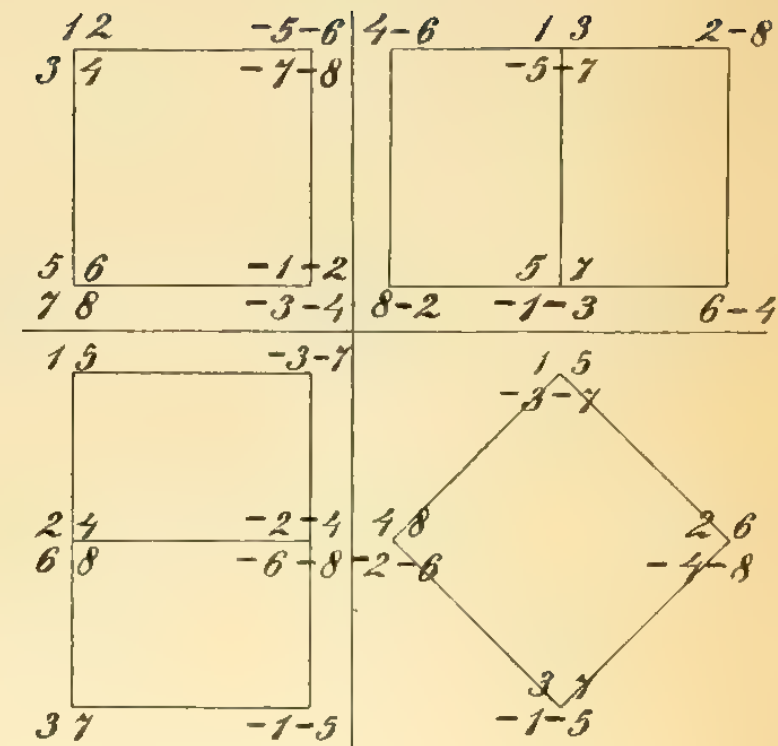
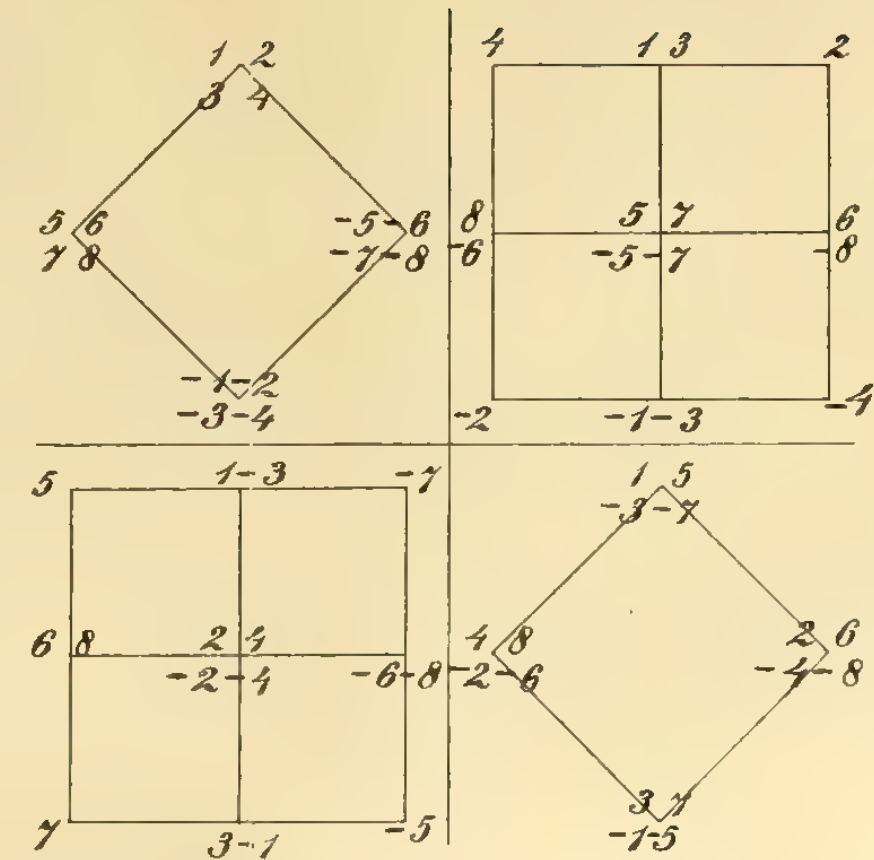
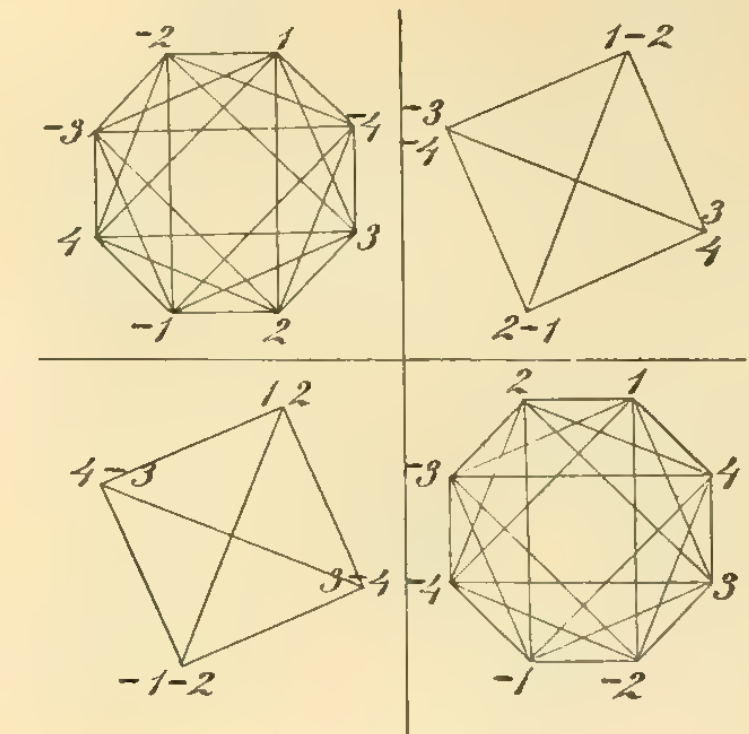
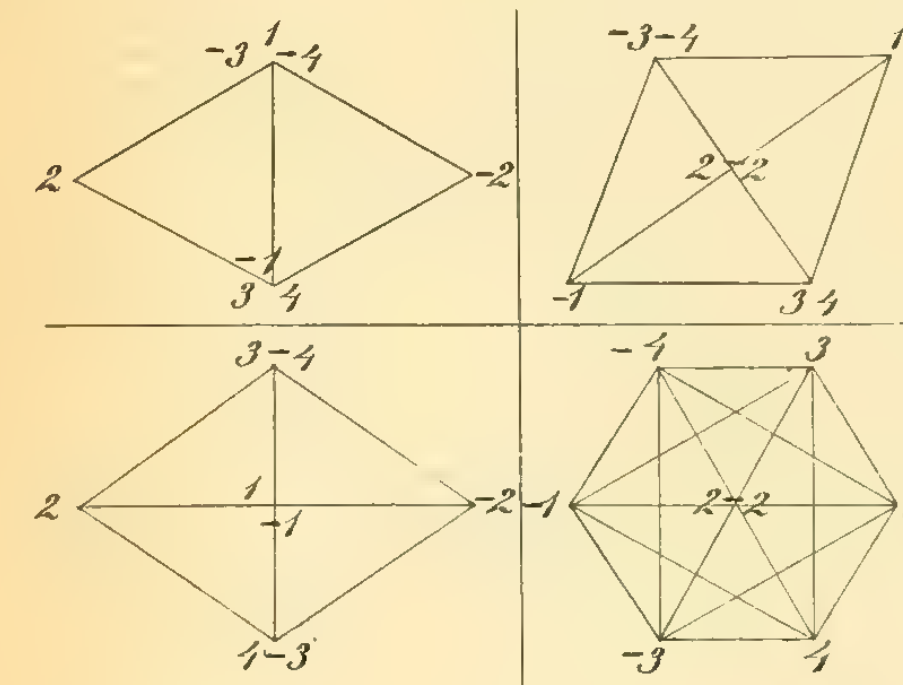
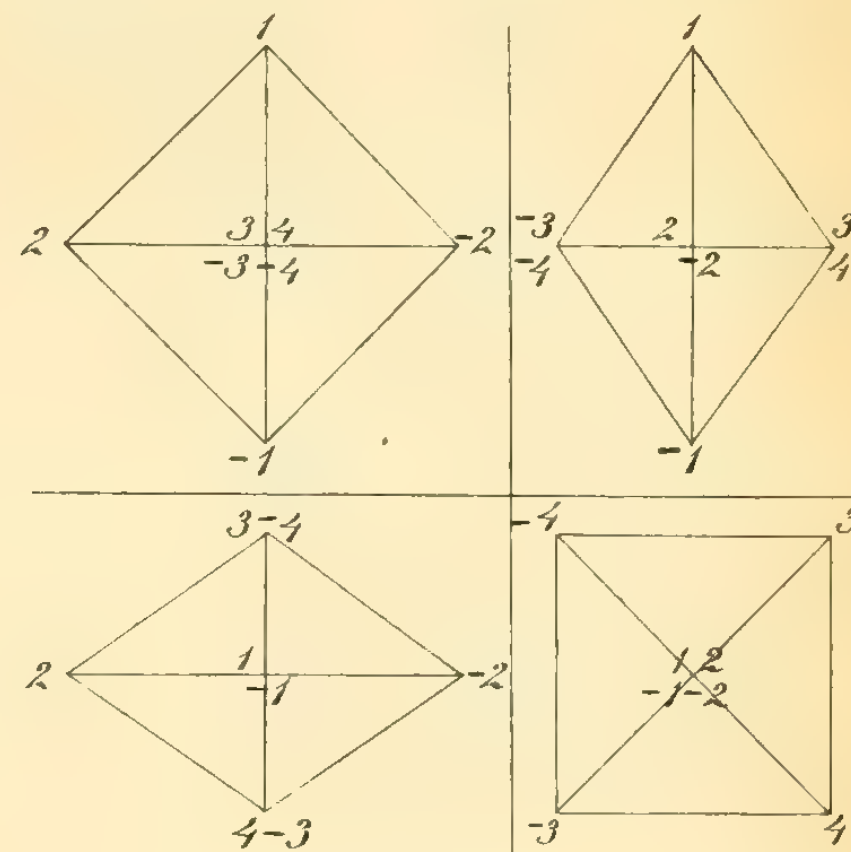
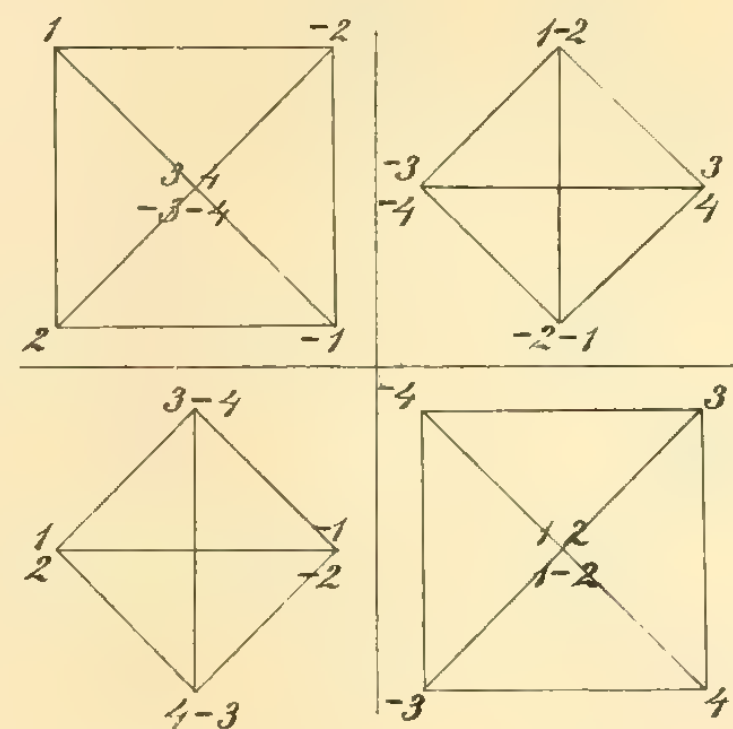
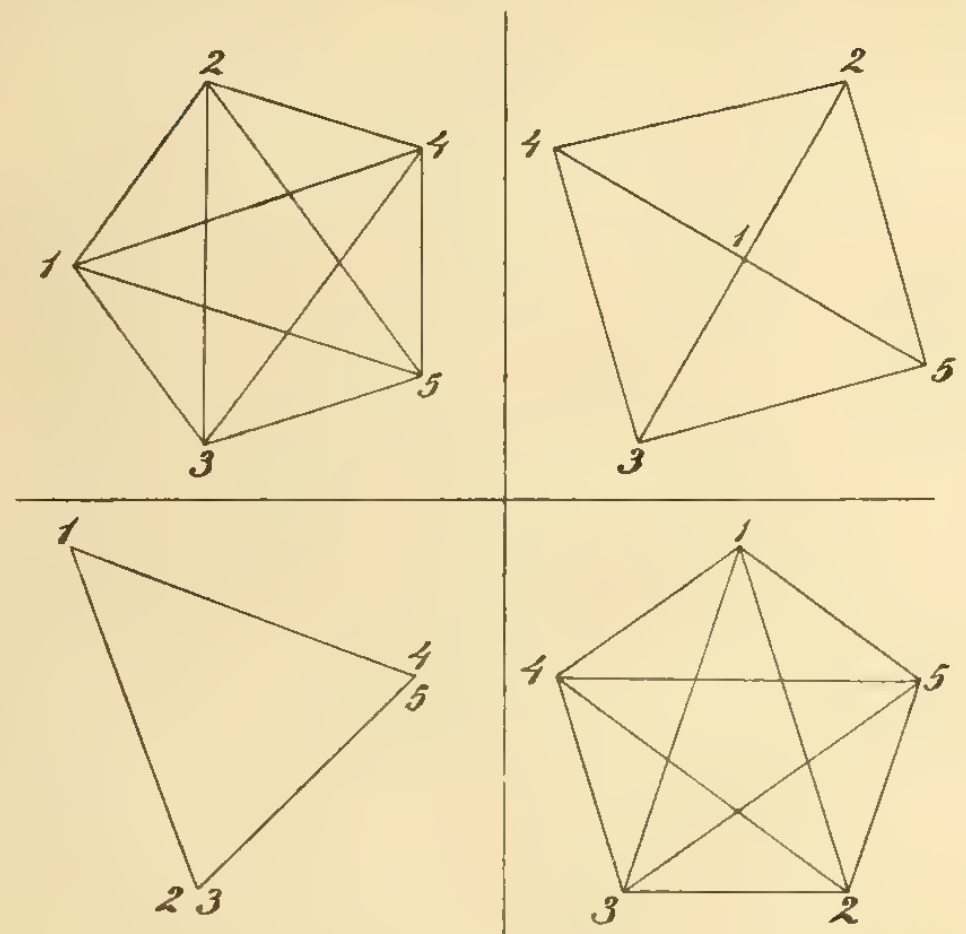
so finden wir, dass die Formel

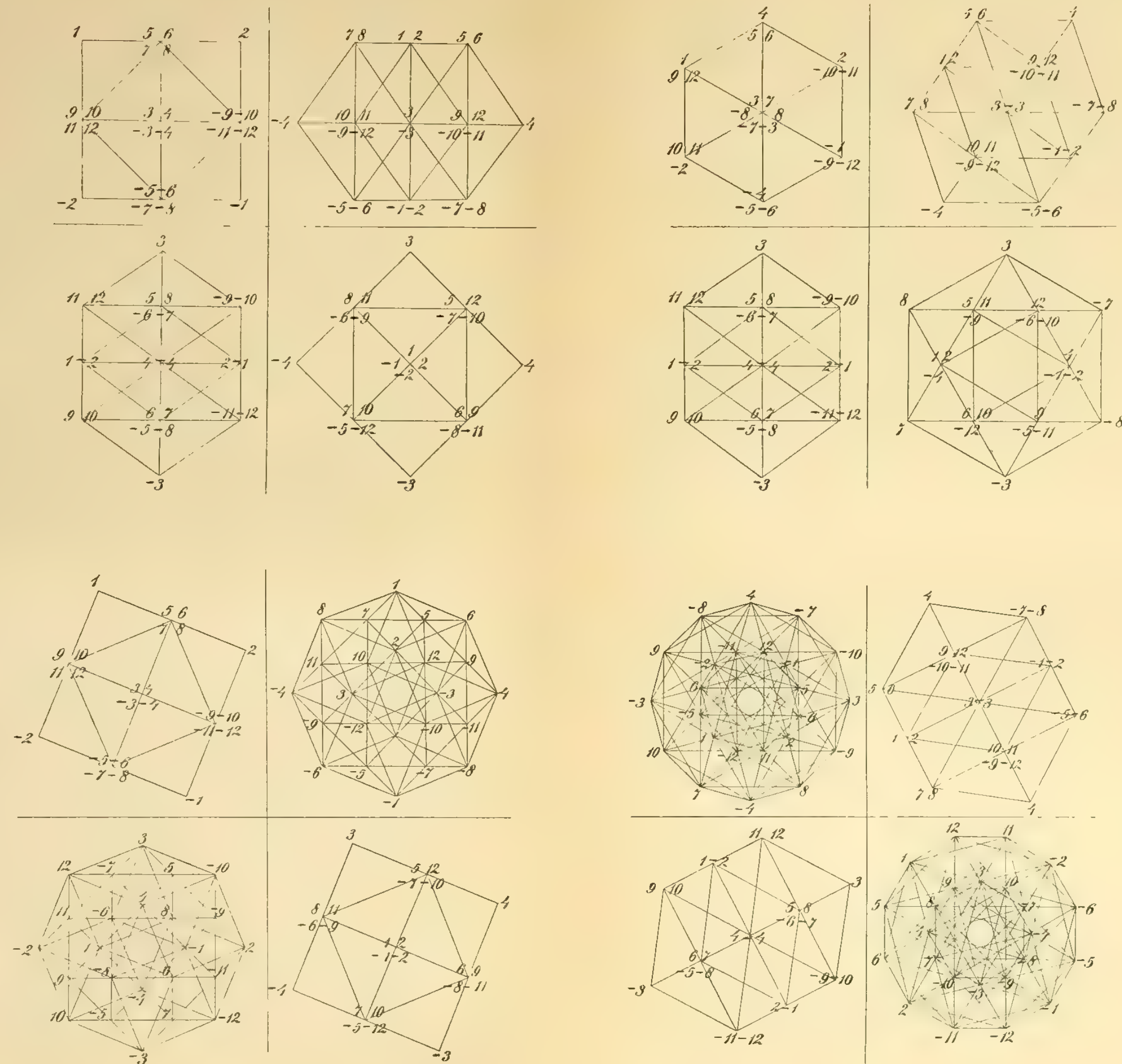
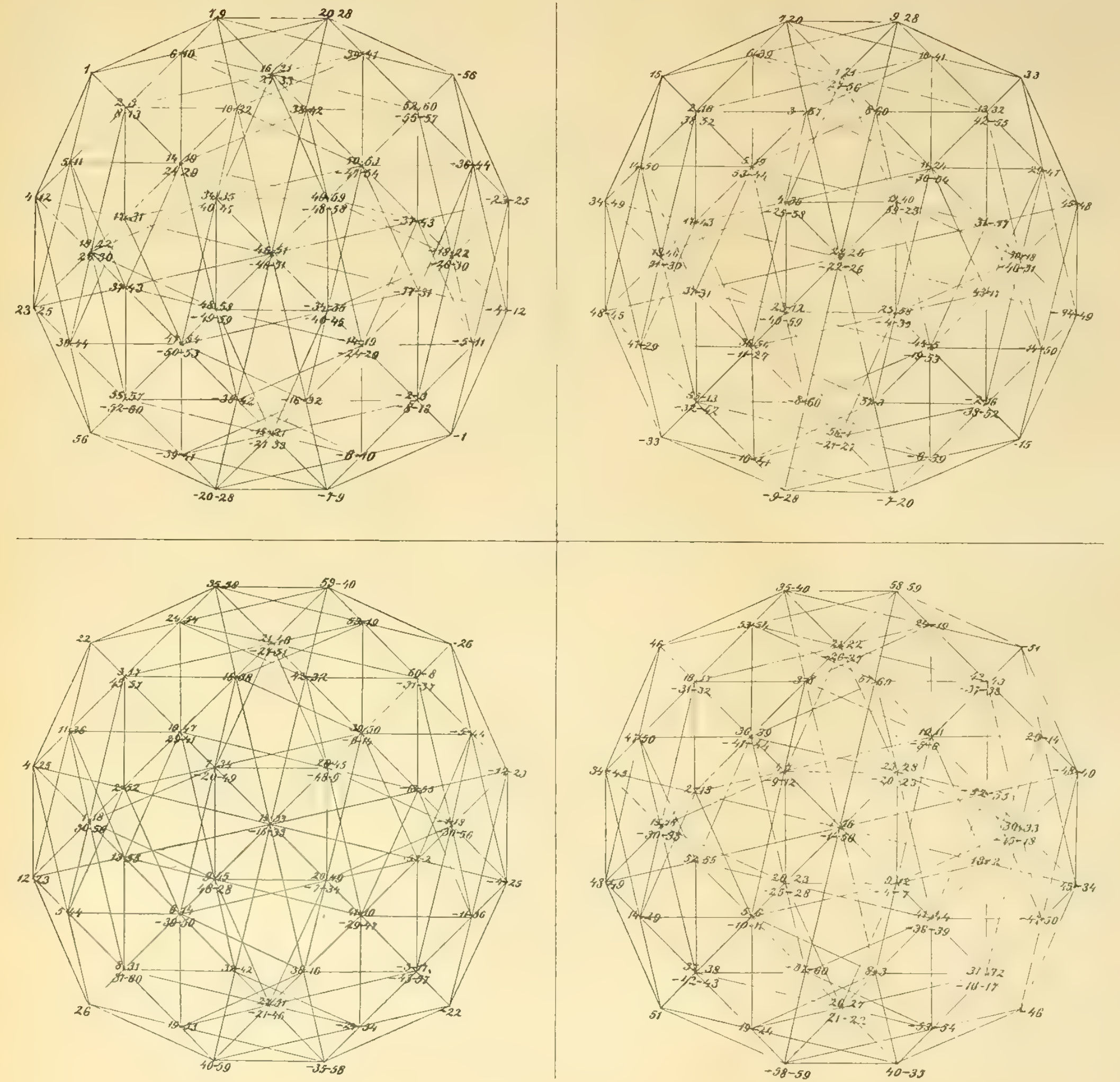
$$S^\alpha T^\beta S^\gamma U^\delta V^{-1} S^{\alpha'} T^{\beta'} S^{\gamma'} U^{\delta'} V S^{\alpha''} T^{\beta''} S^{\gamma''} U^{\delta''}$$

die 7200 Operationen der Z^{600} -Gruppe enthält.

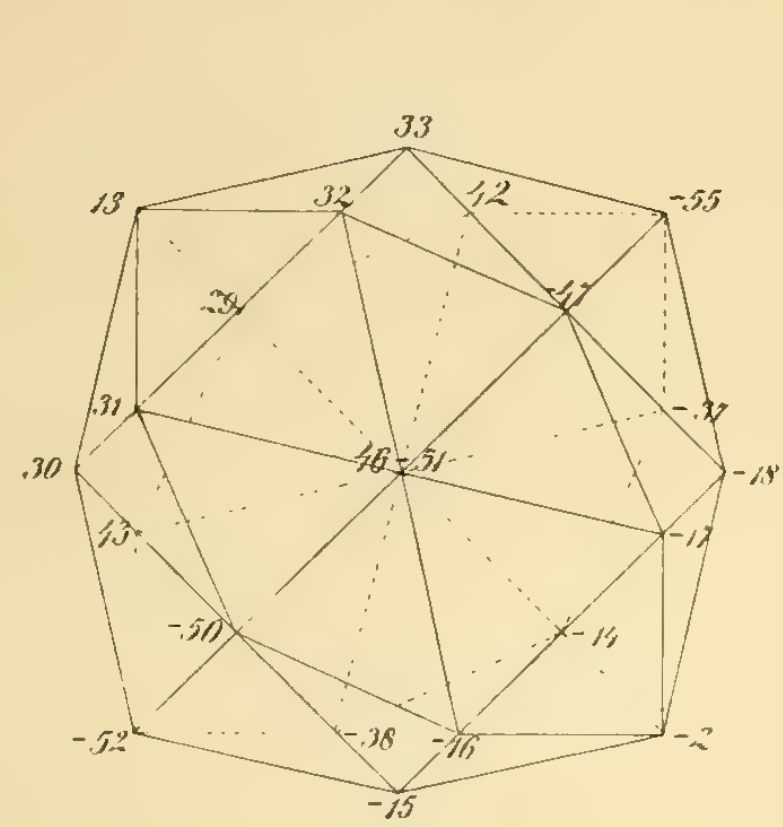
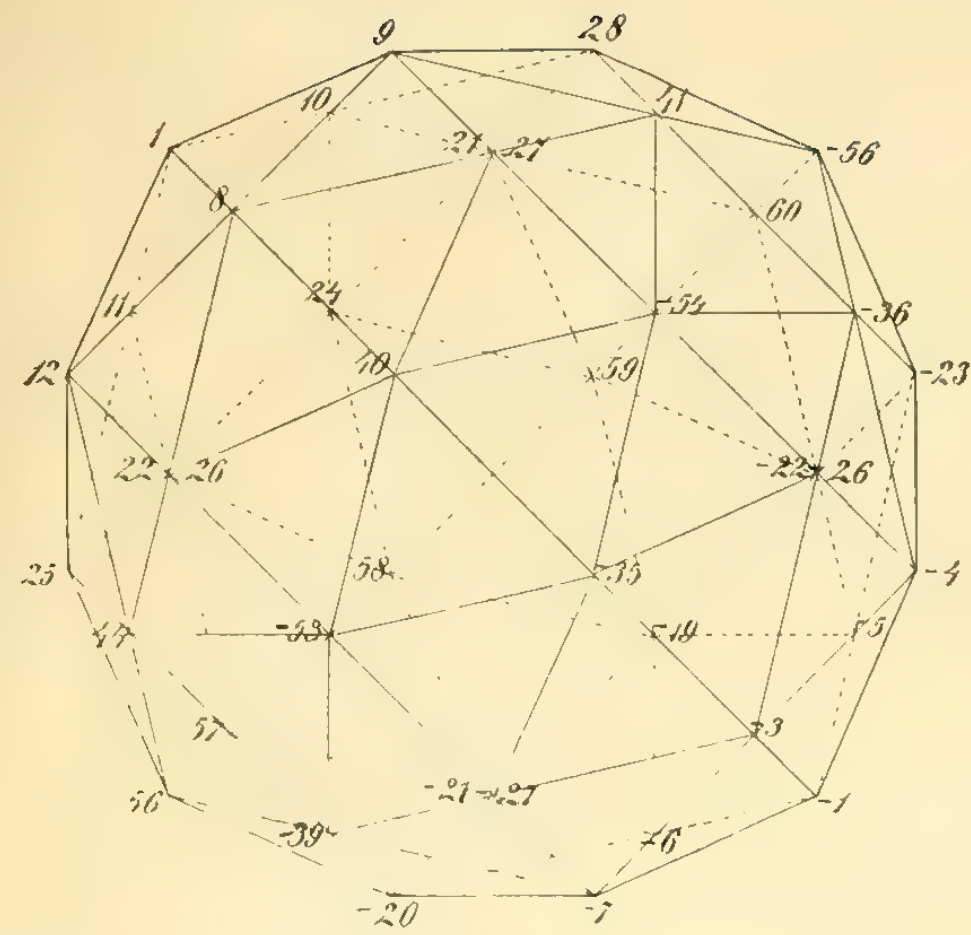
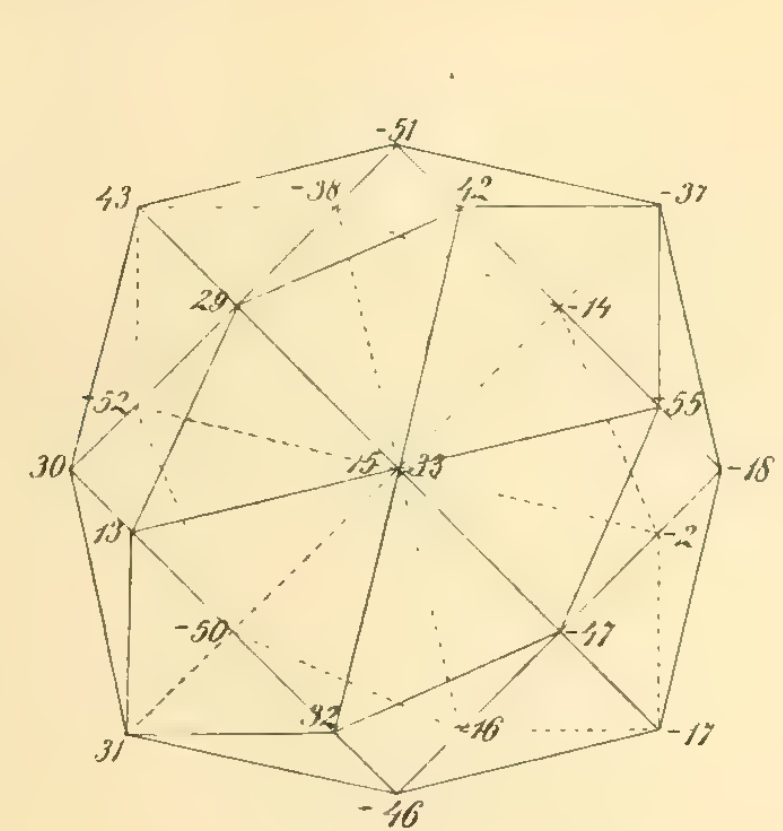
Zalt-Bommel, Januar 1899.

(4 December 1899).

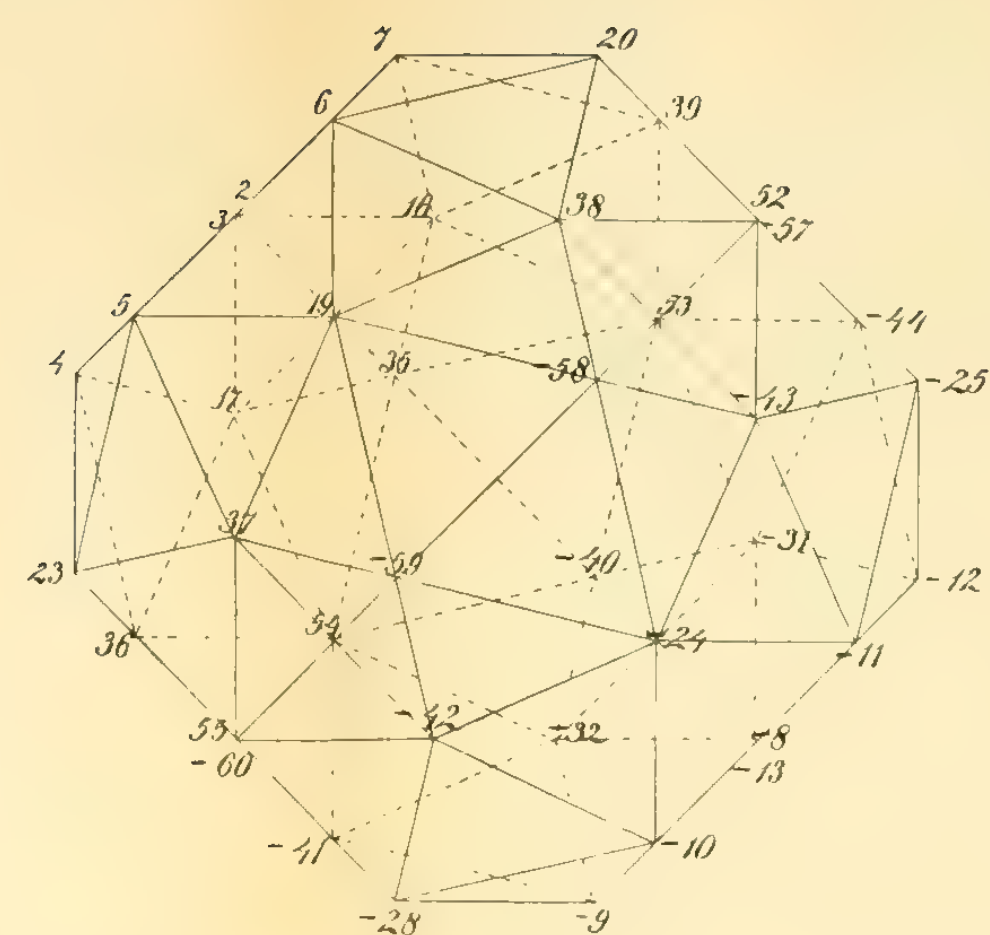
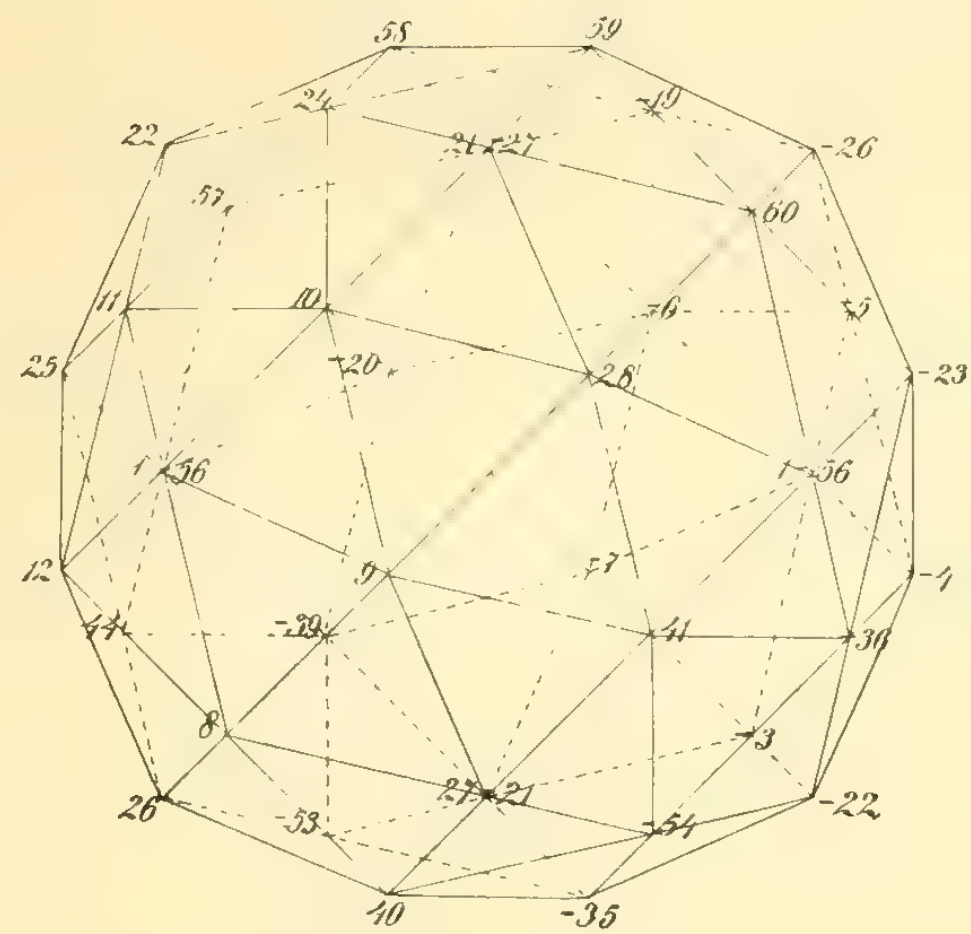
Z^5  Z^8  Z^{16} 

Z^{24}  Z^{600} 

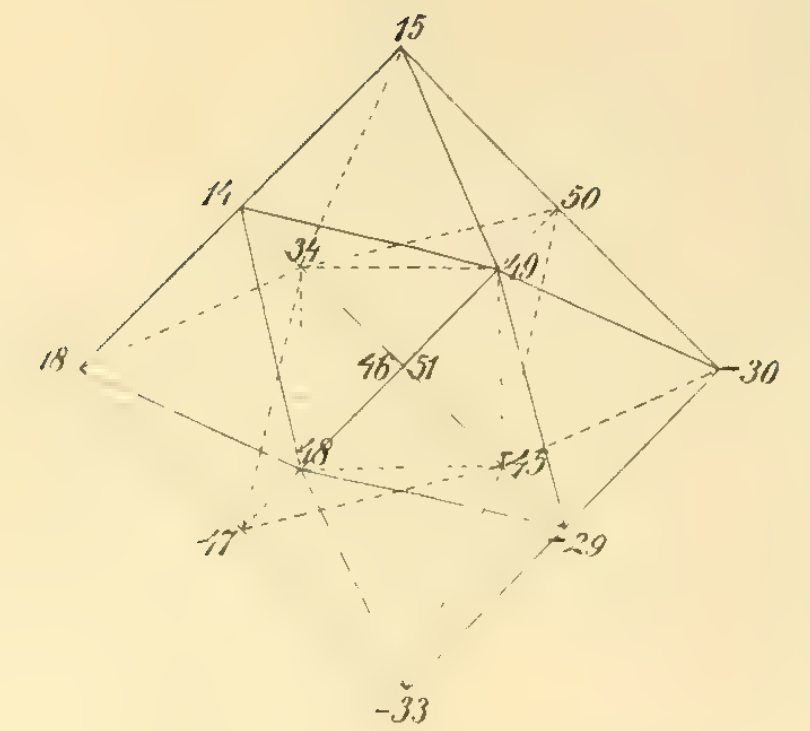
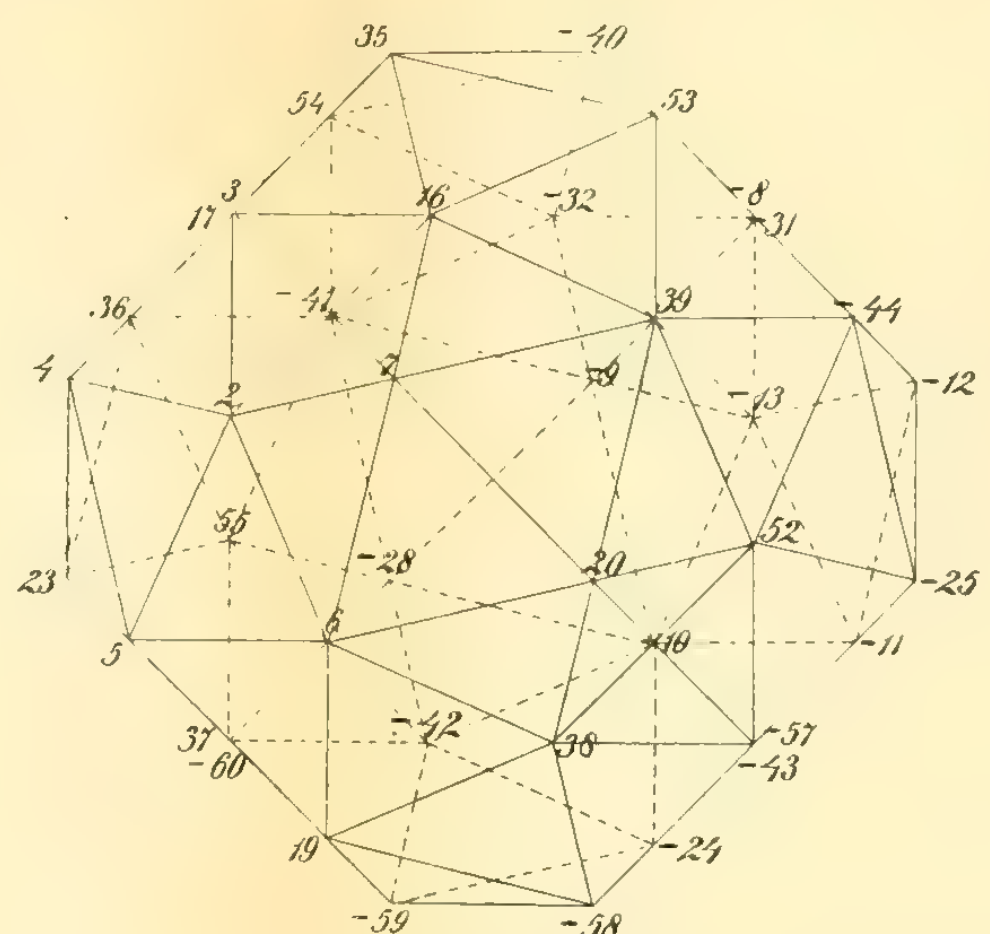
Z⁶⁰⁰

 X_4 

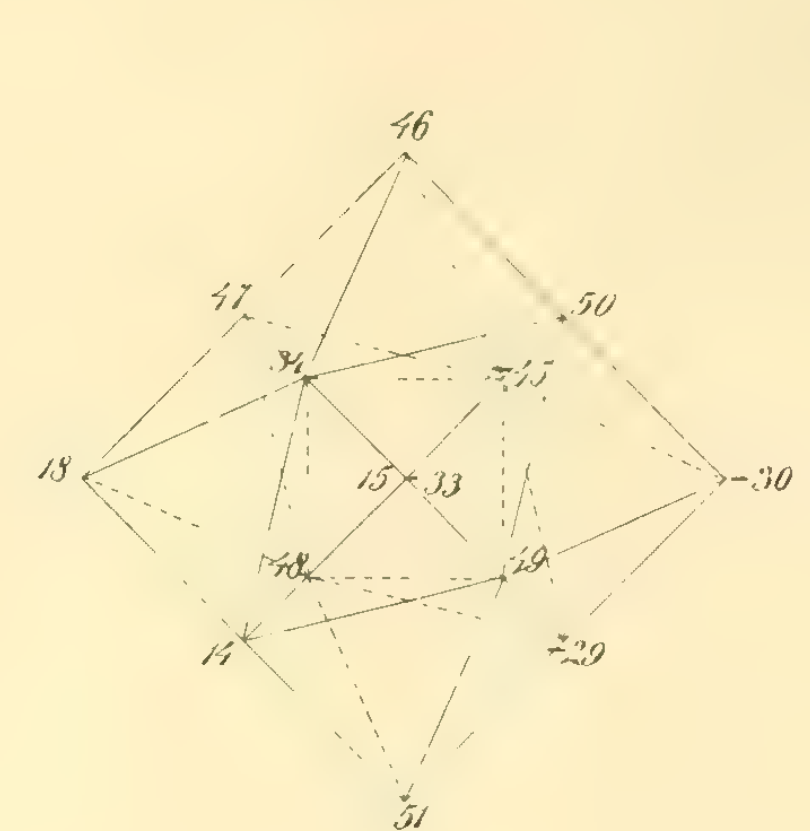
4

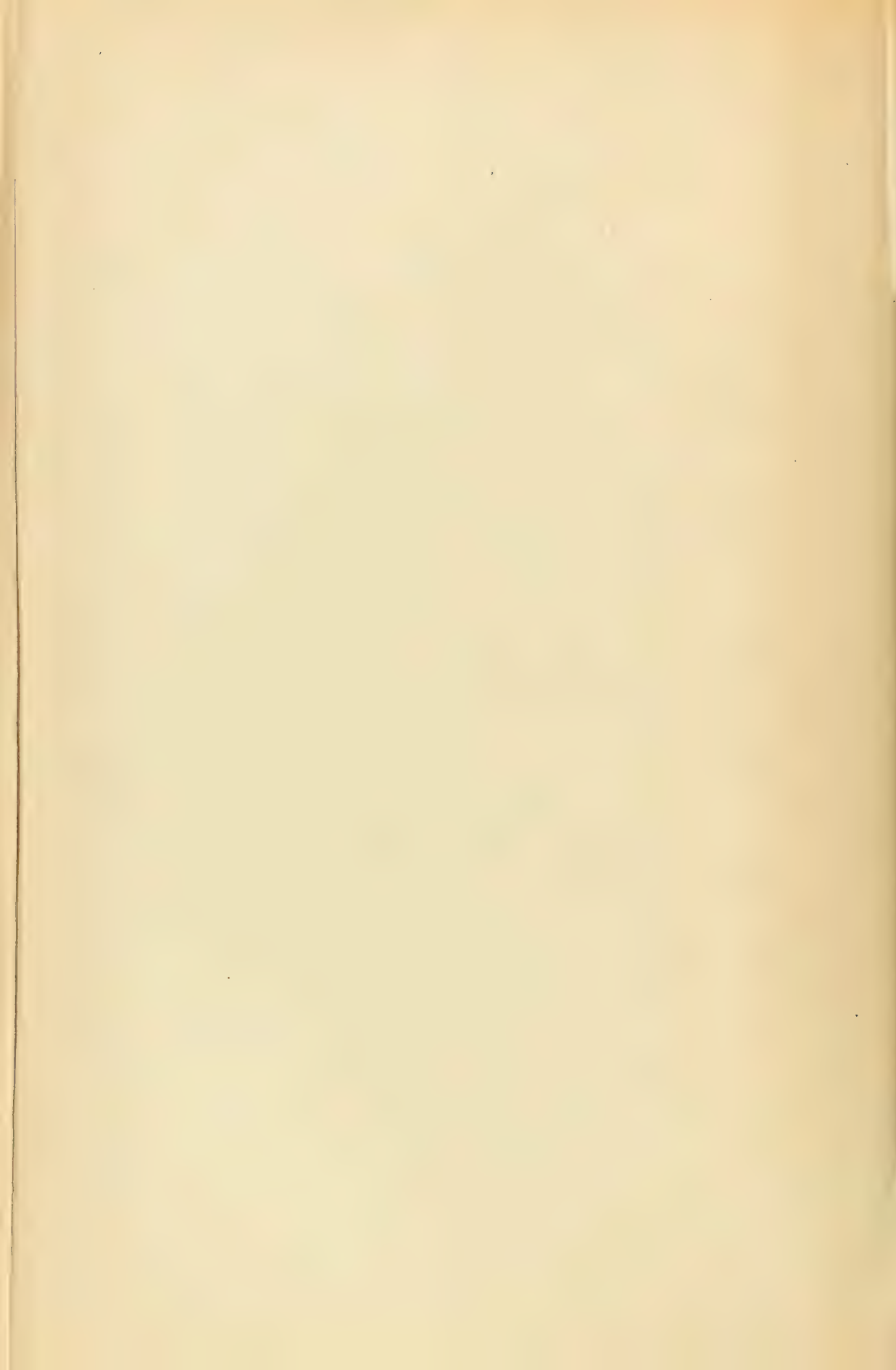


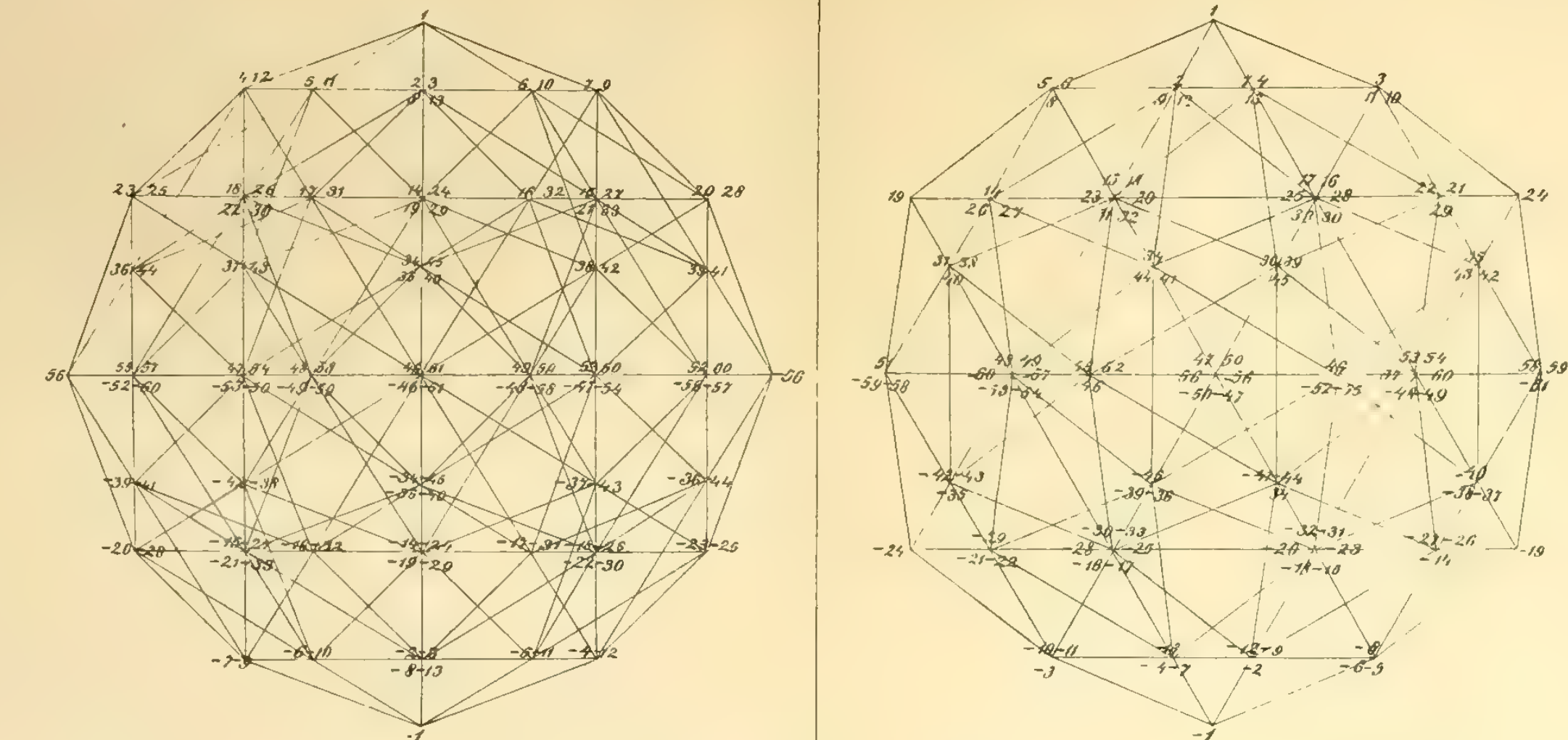
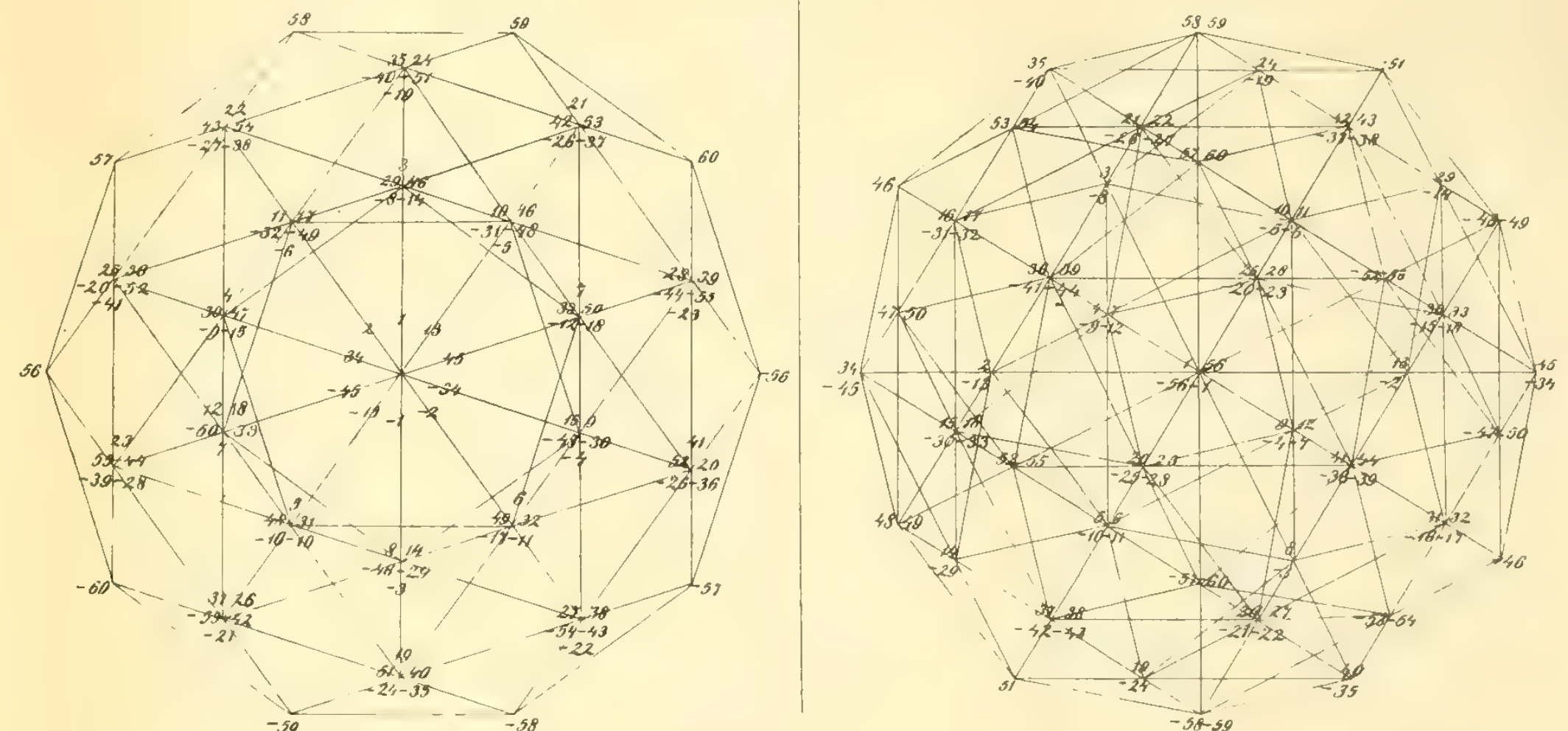
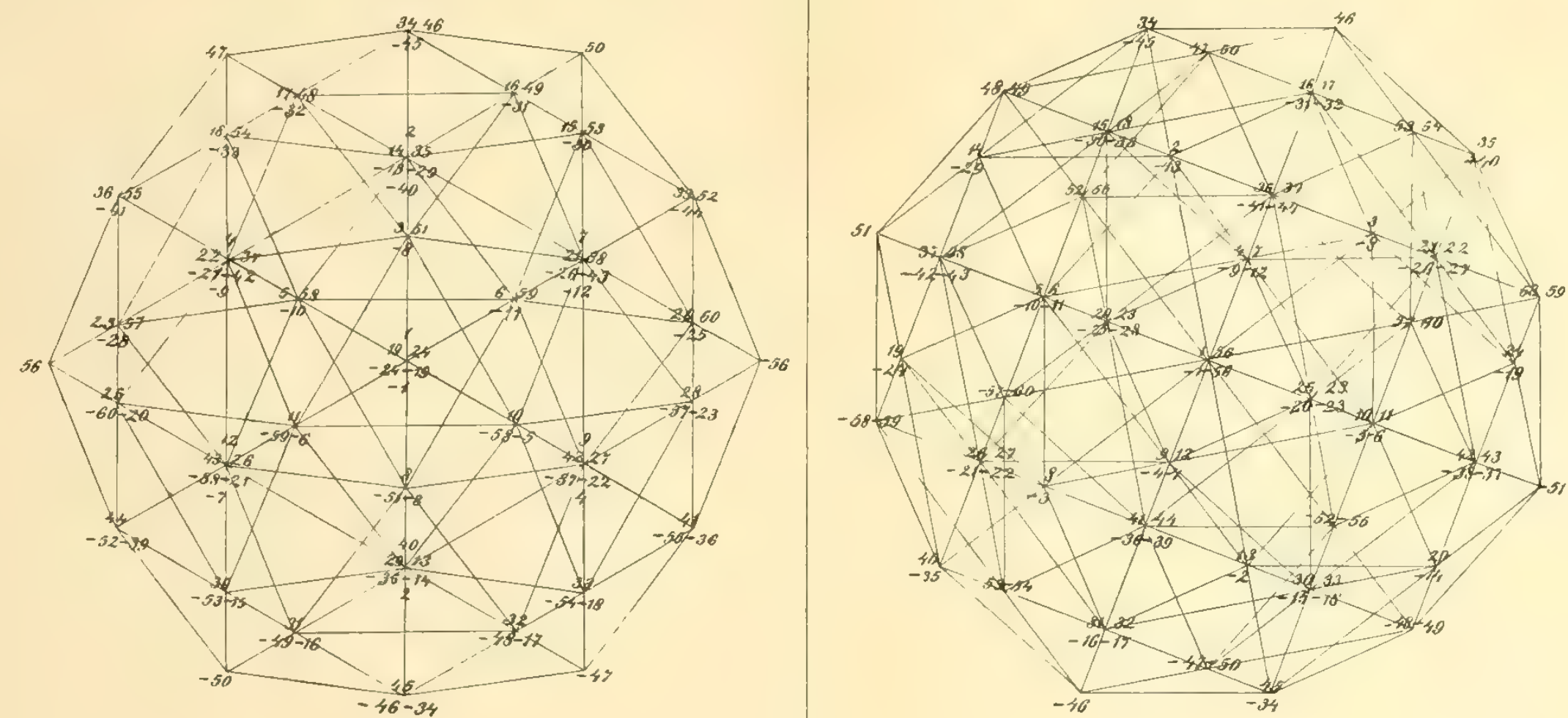
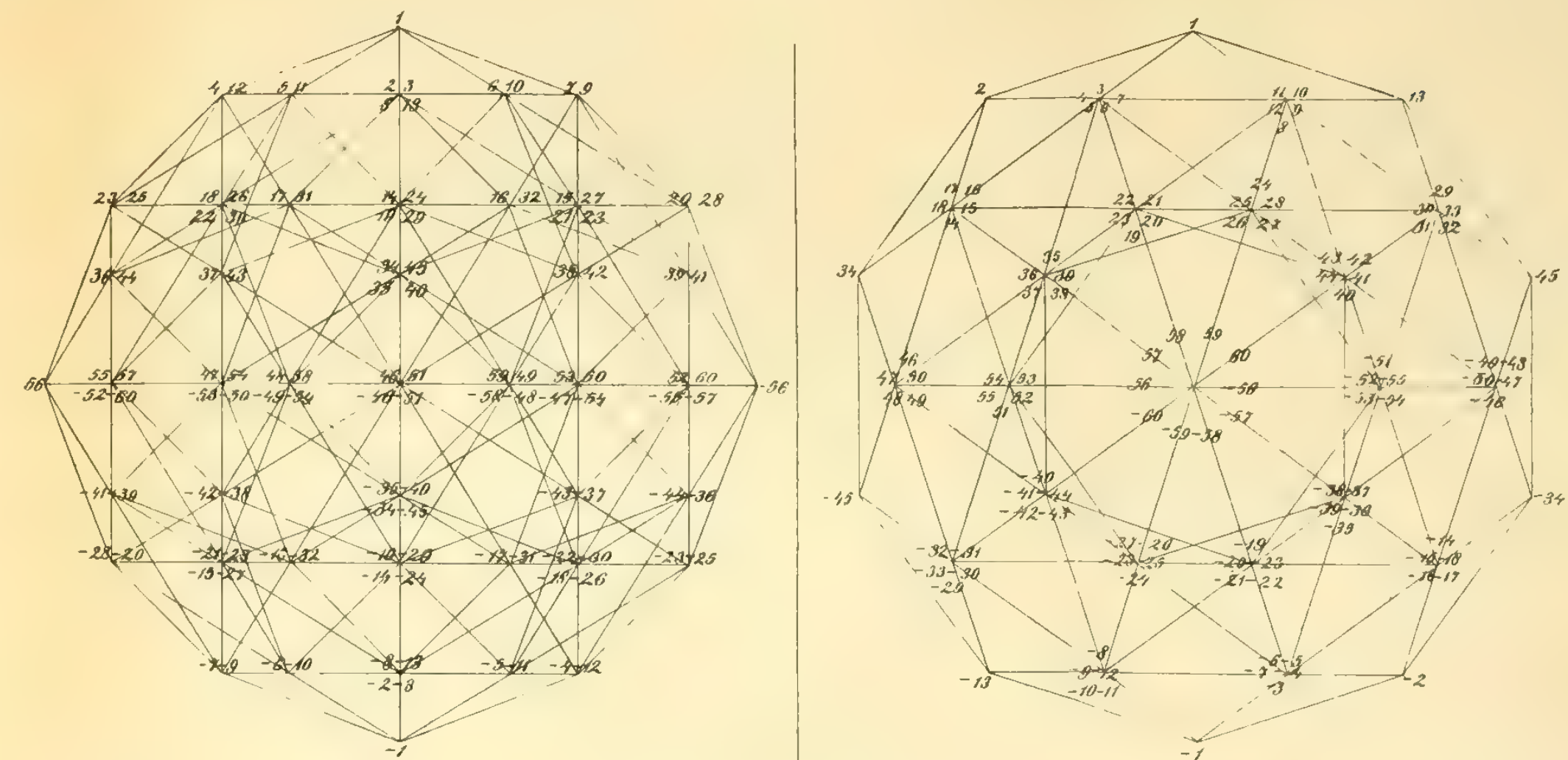
X



>

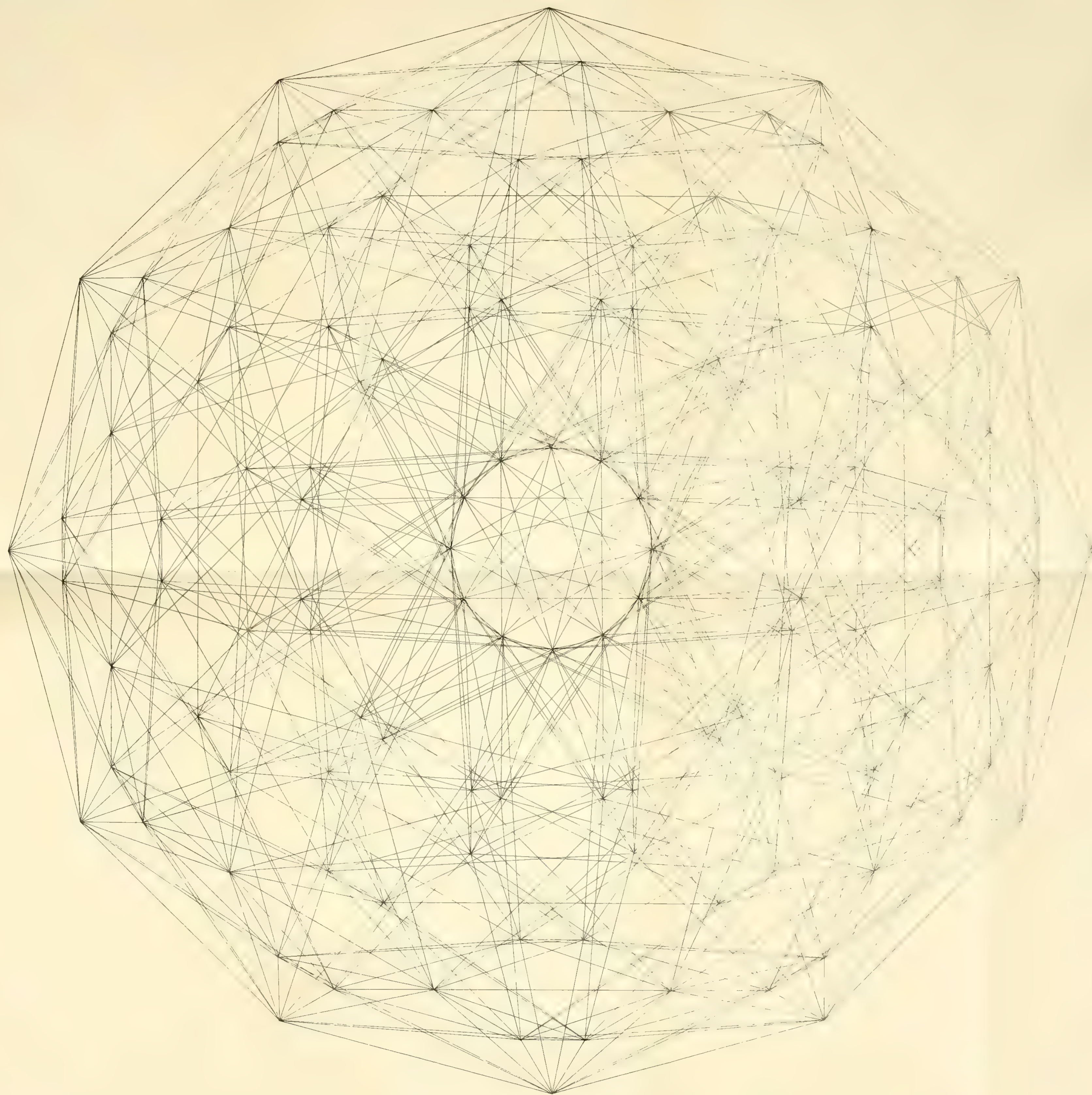


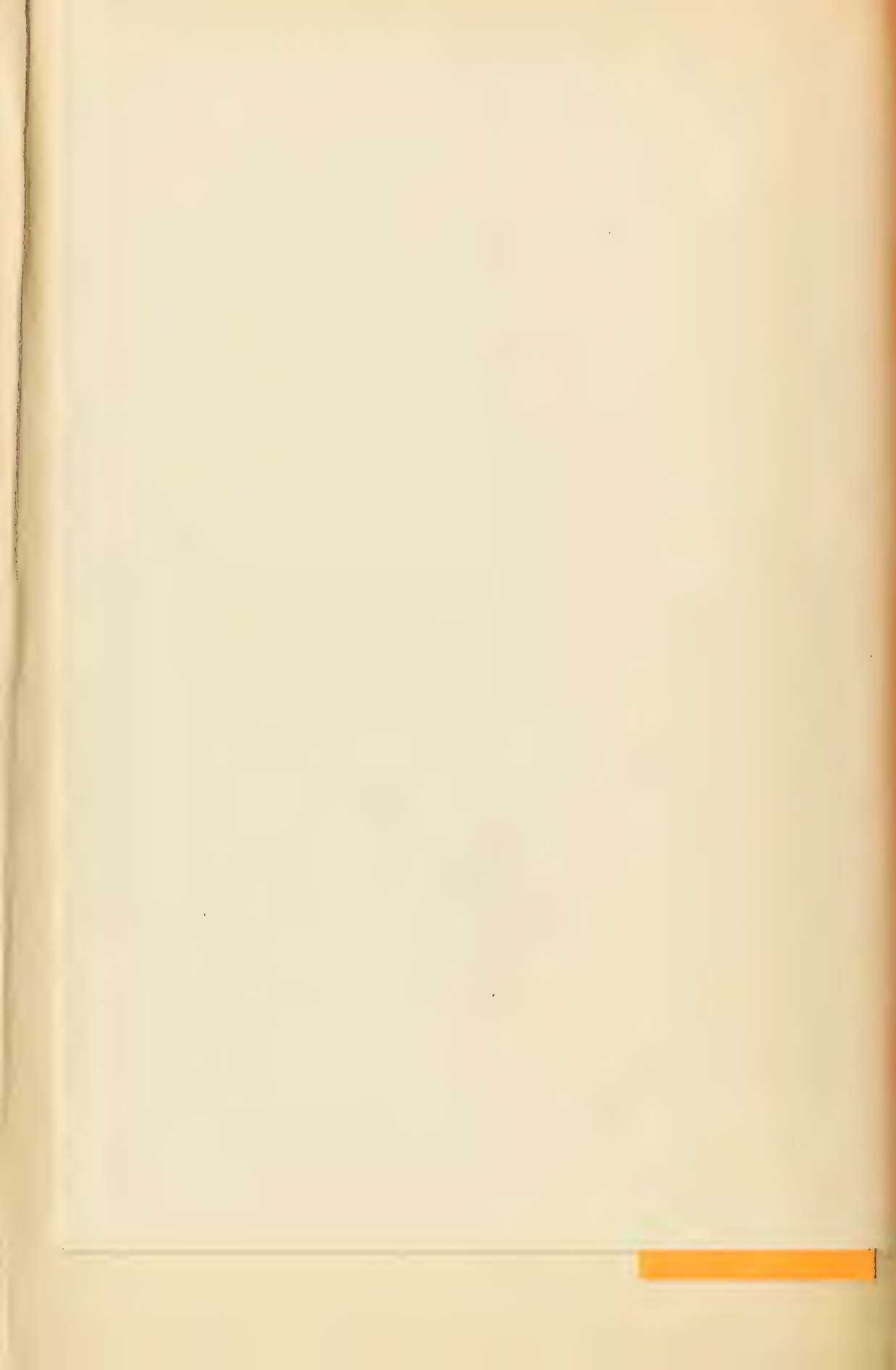


Z^{600}  Z^{600} 

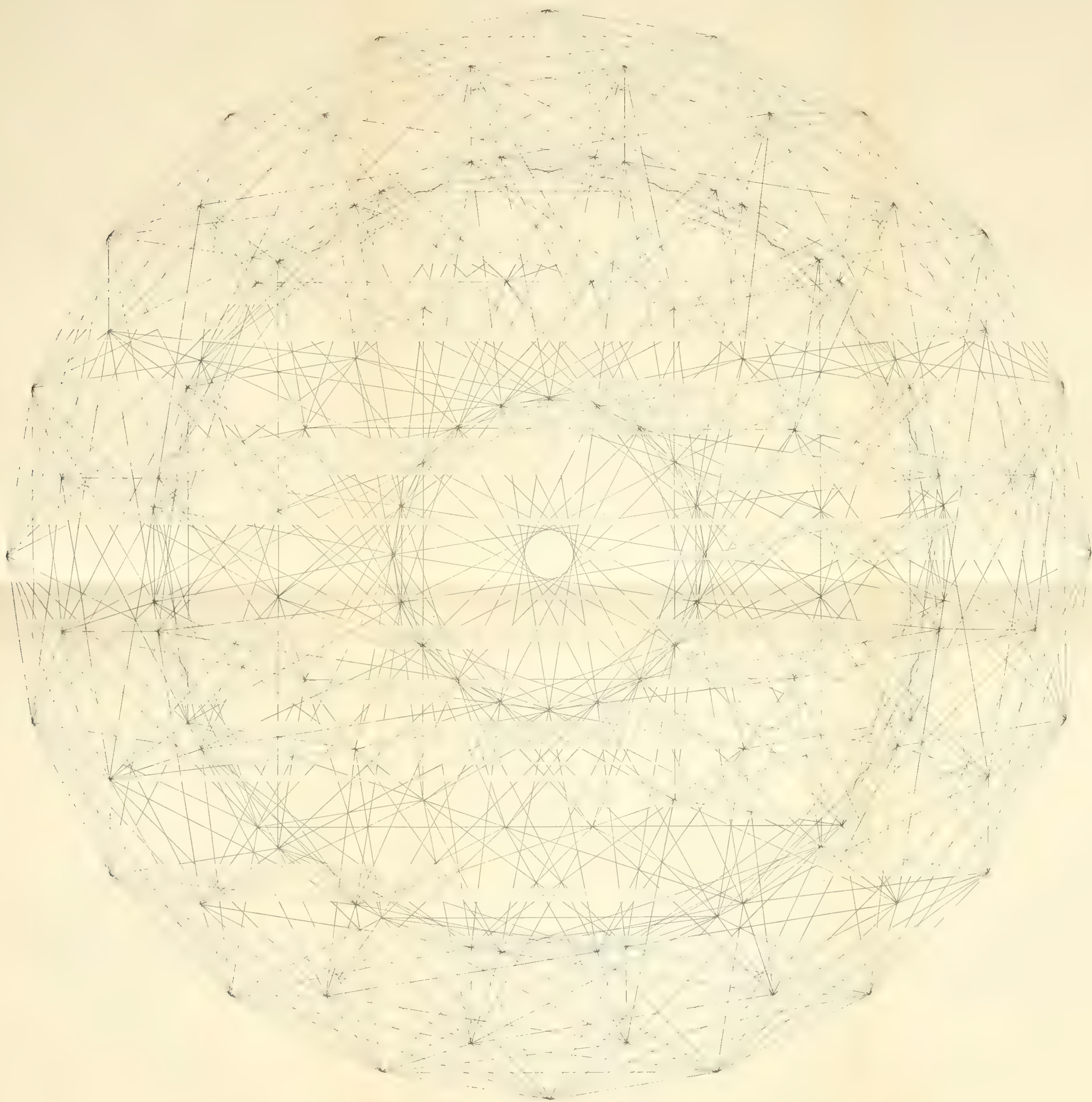


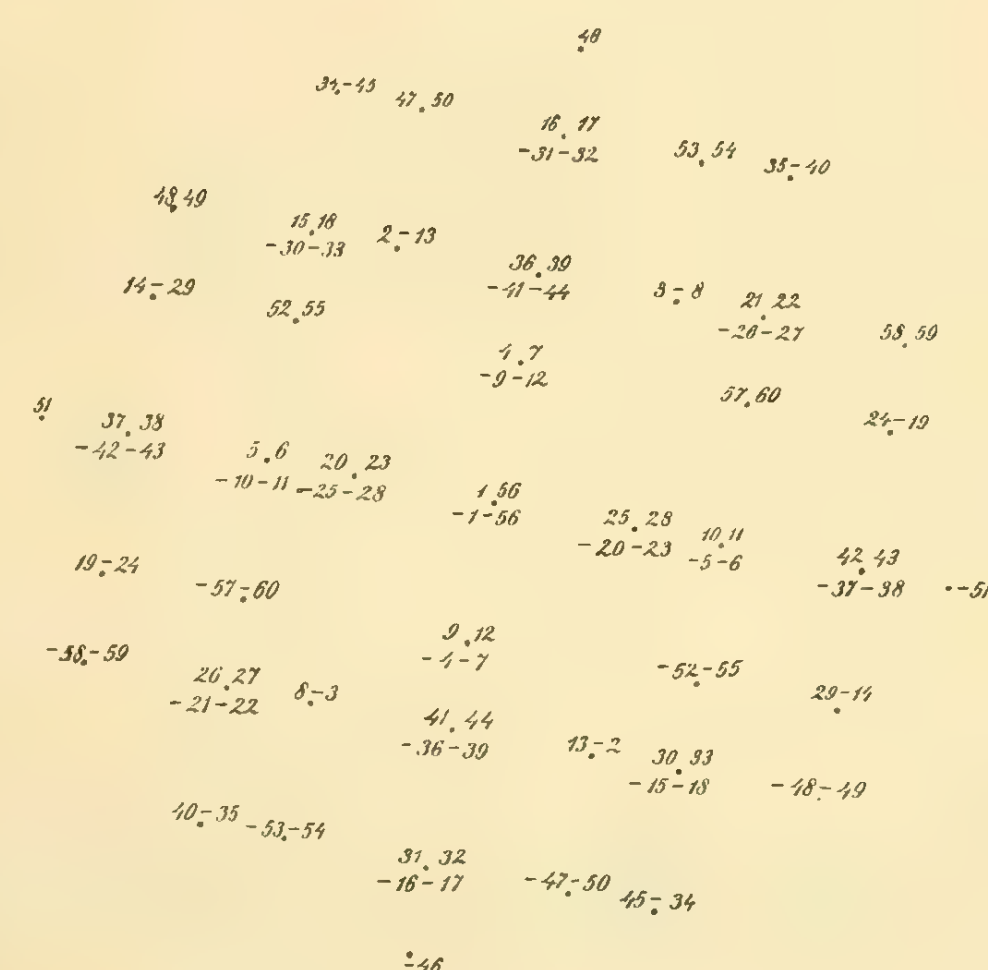
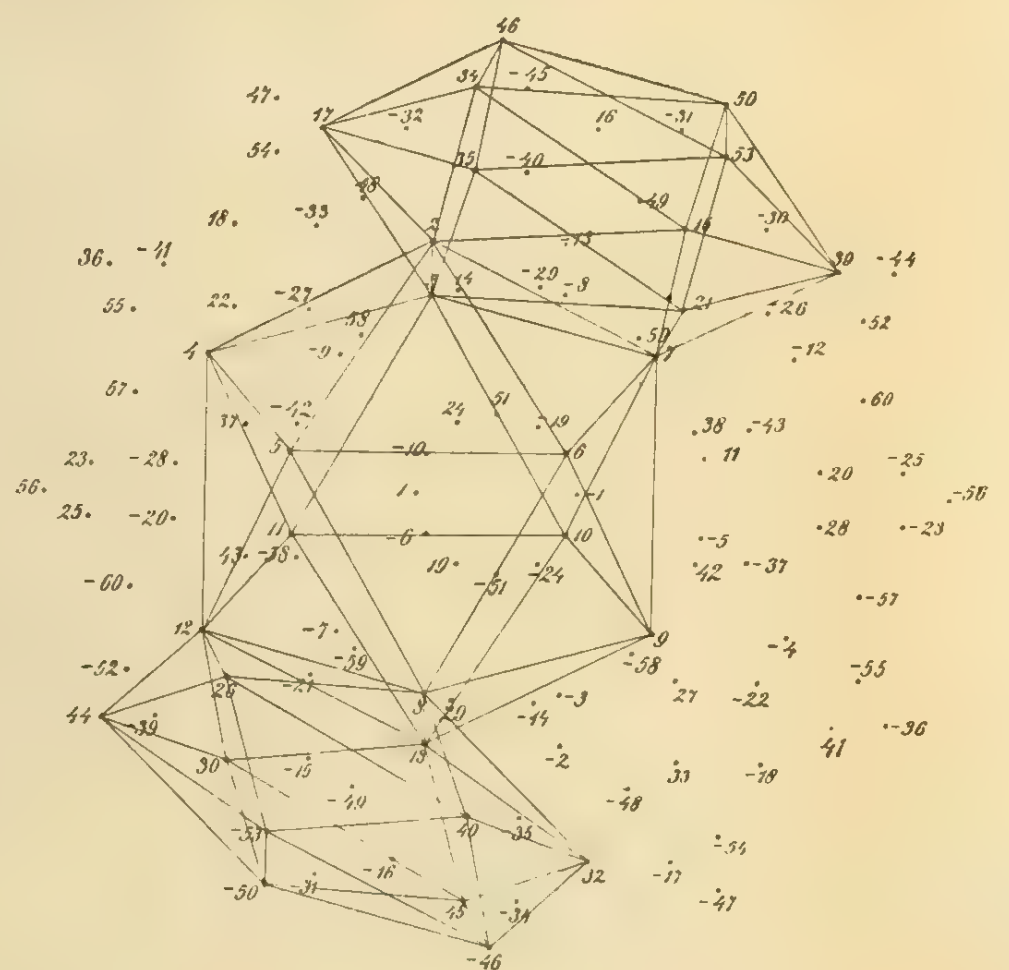
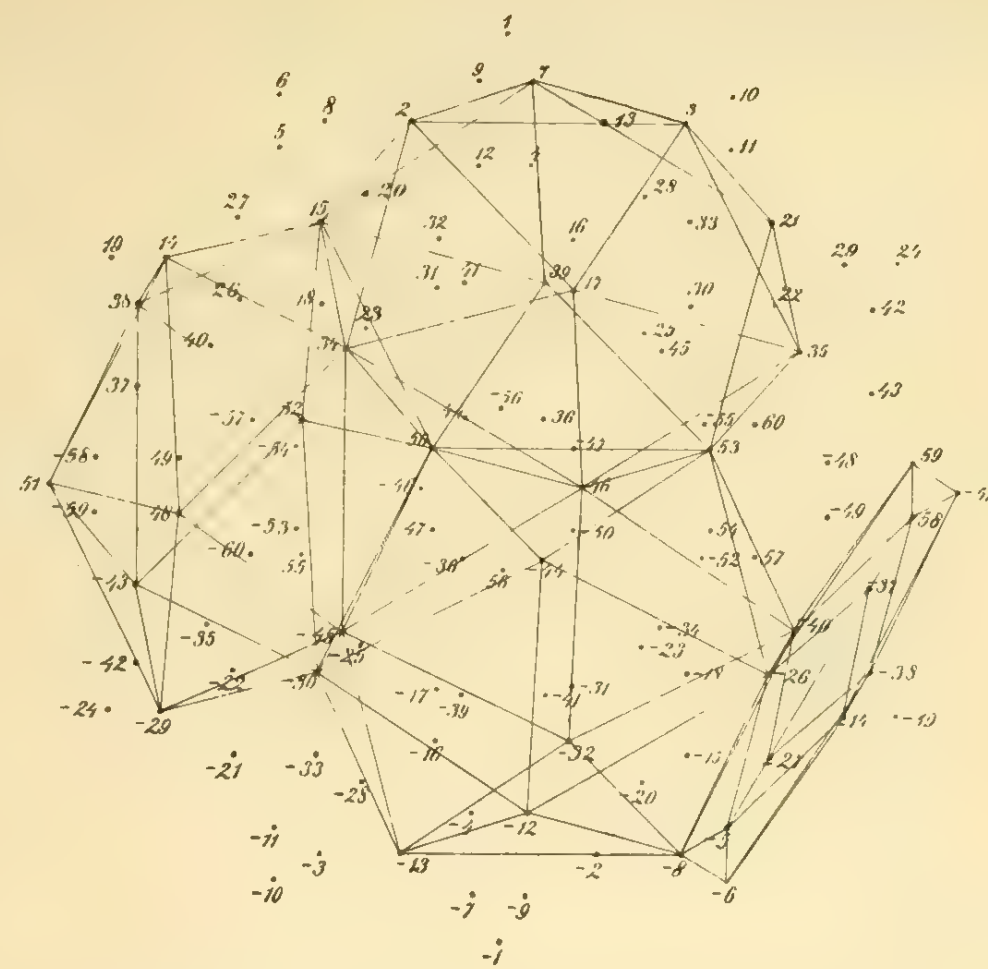
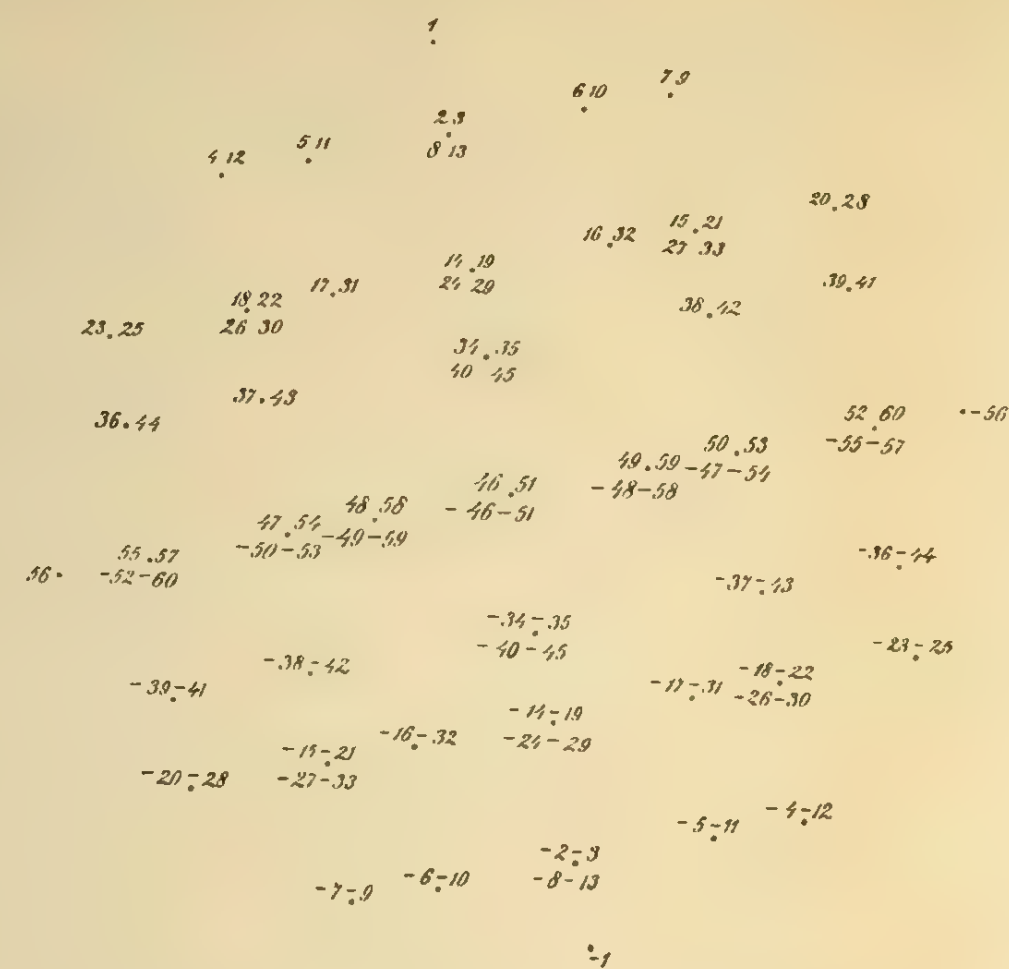
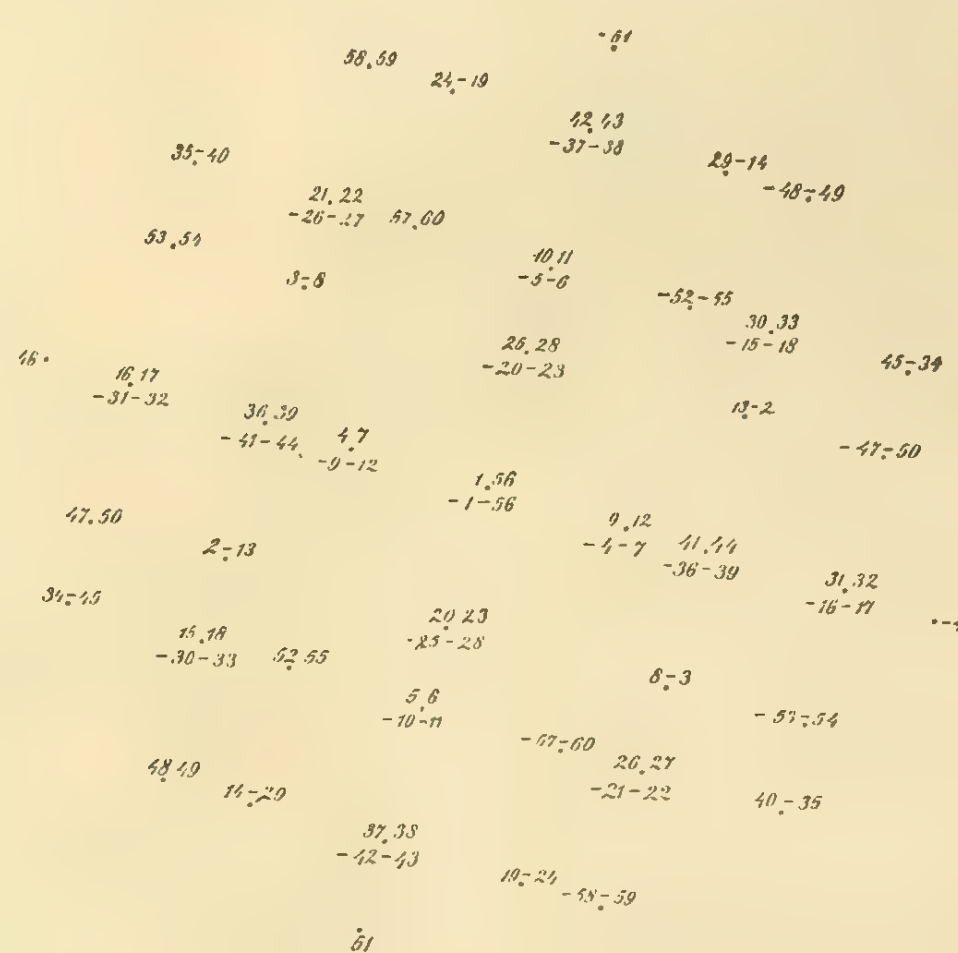
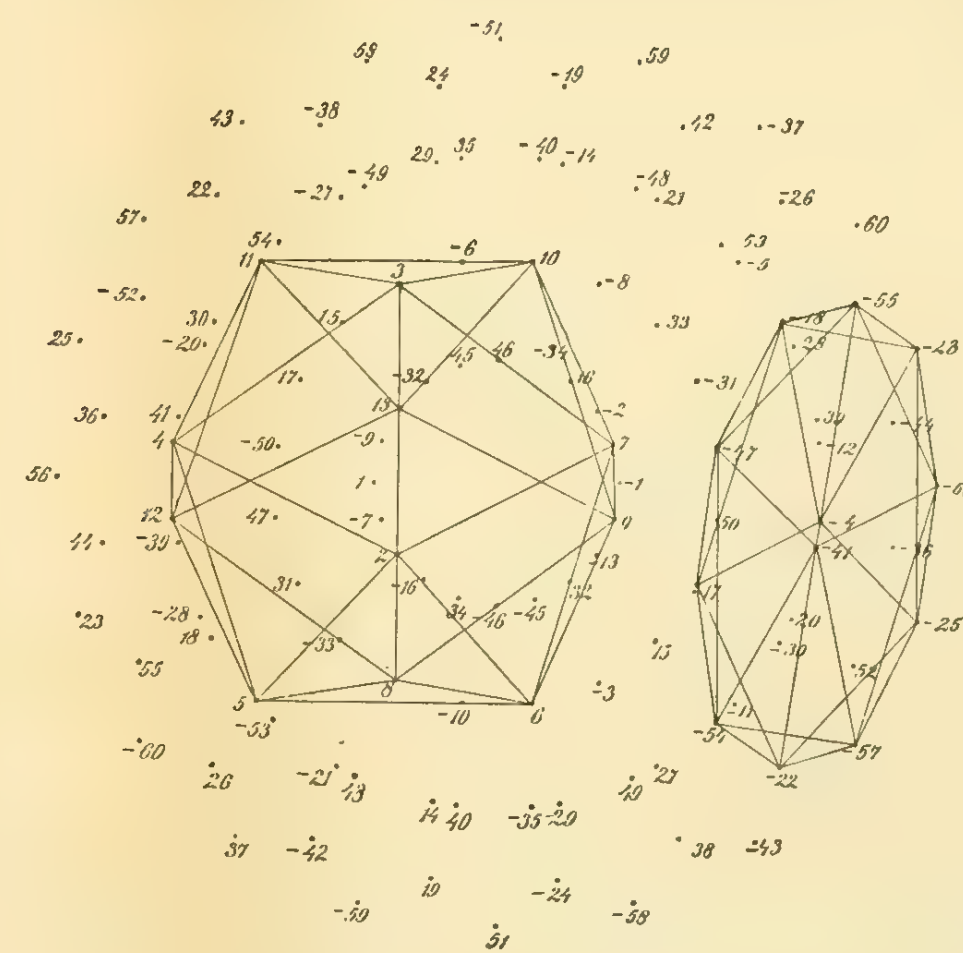
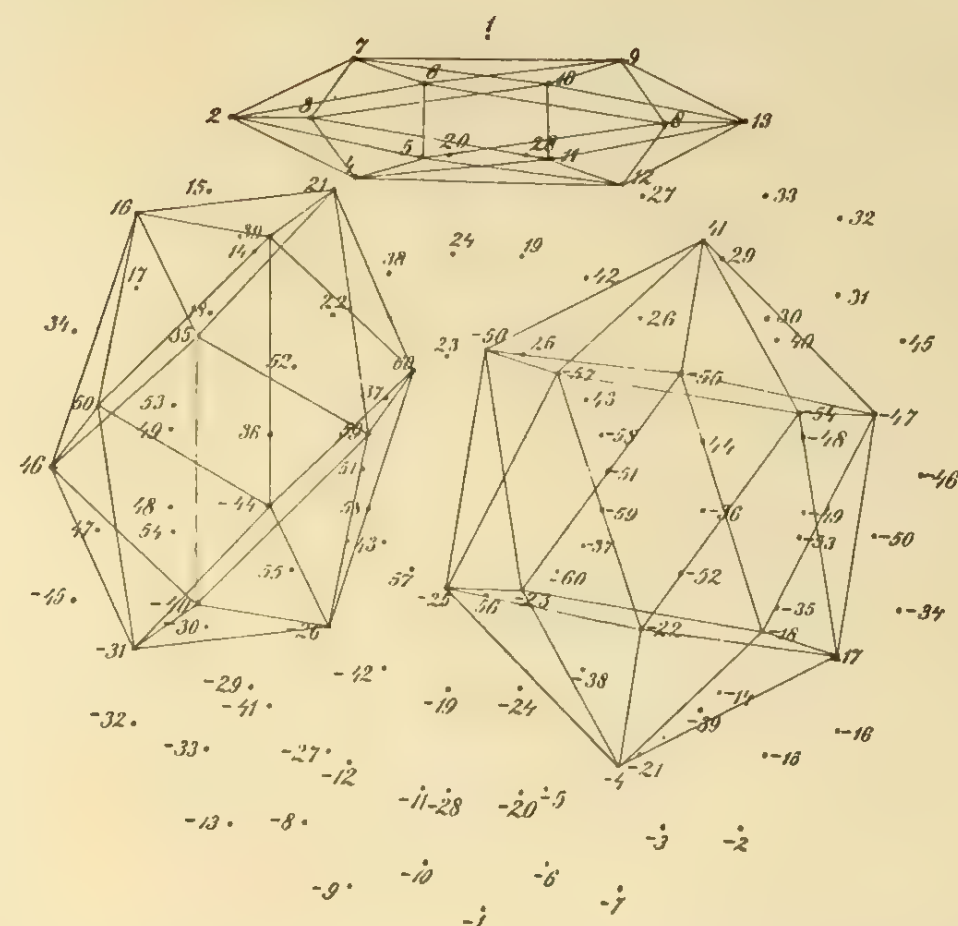
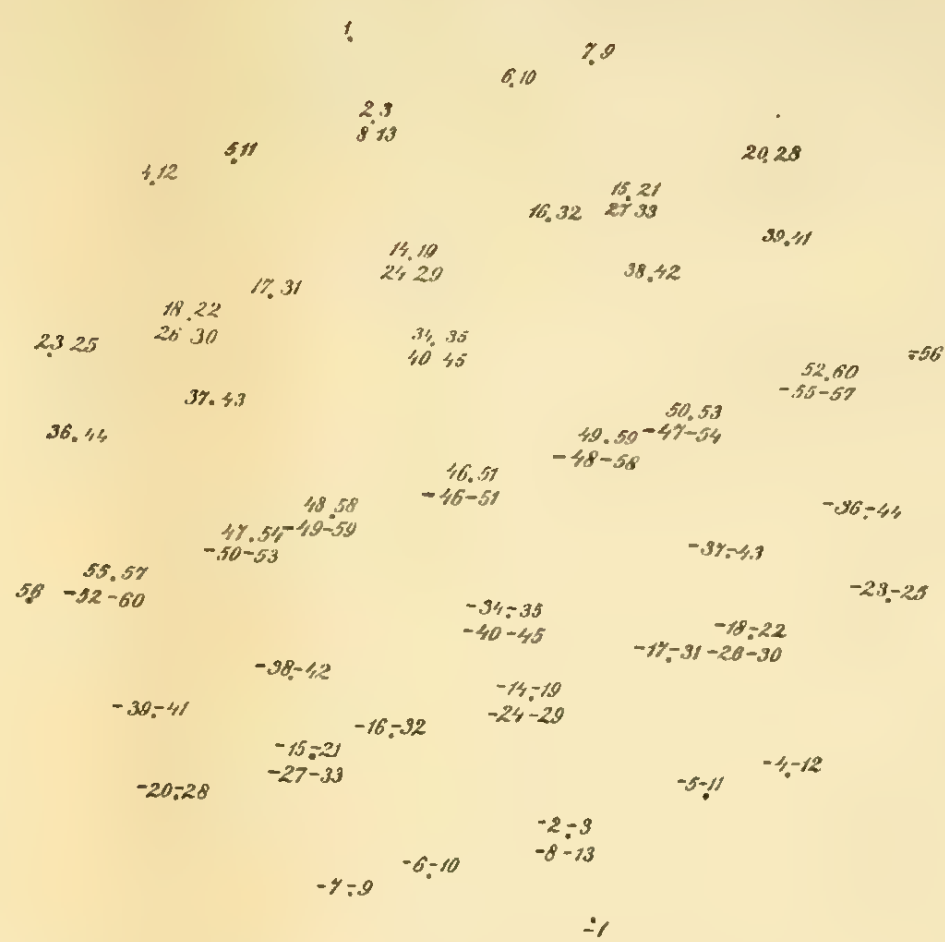
Z 600

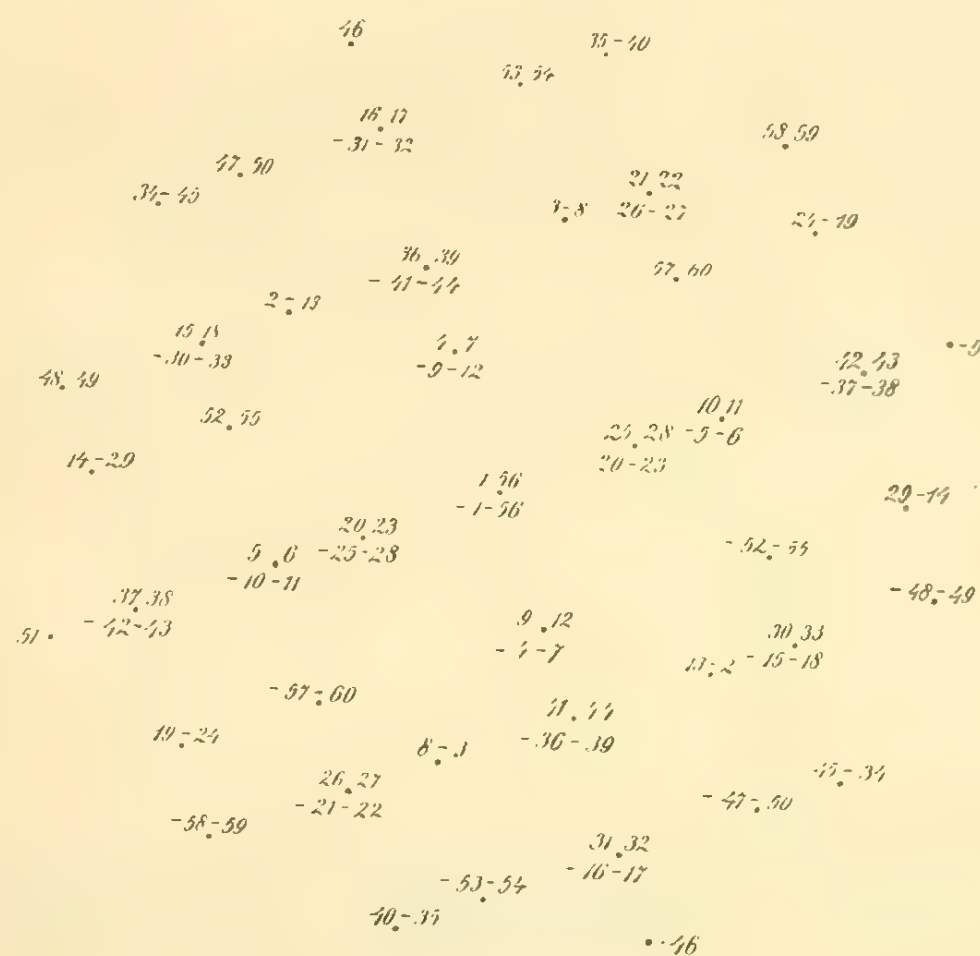
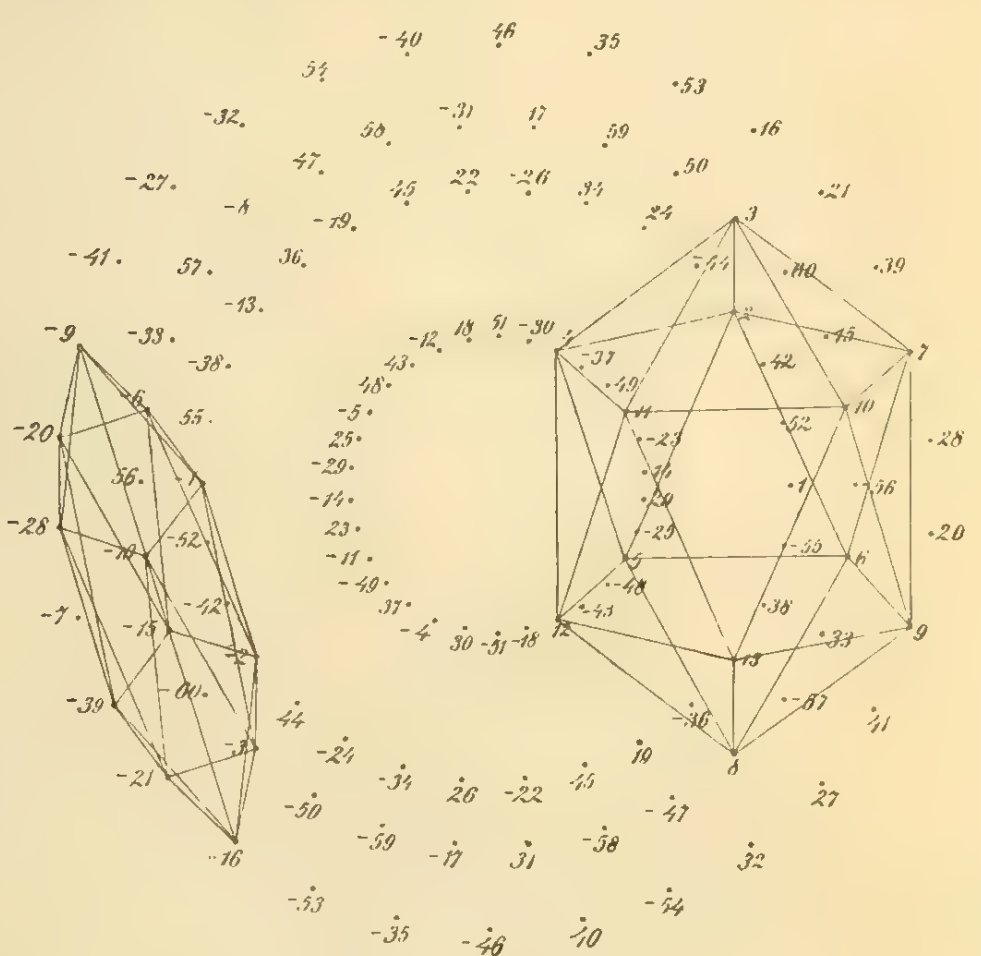
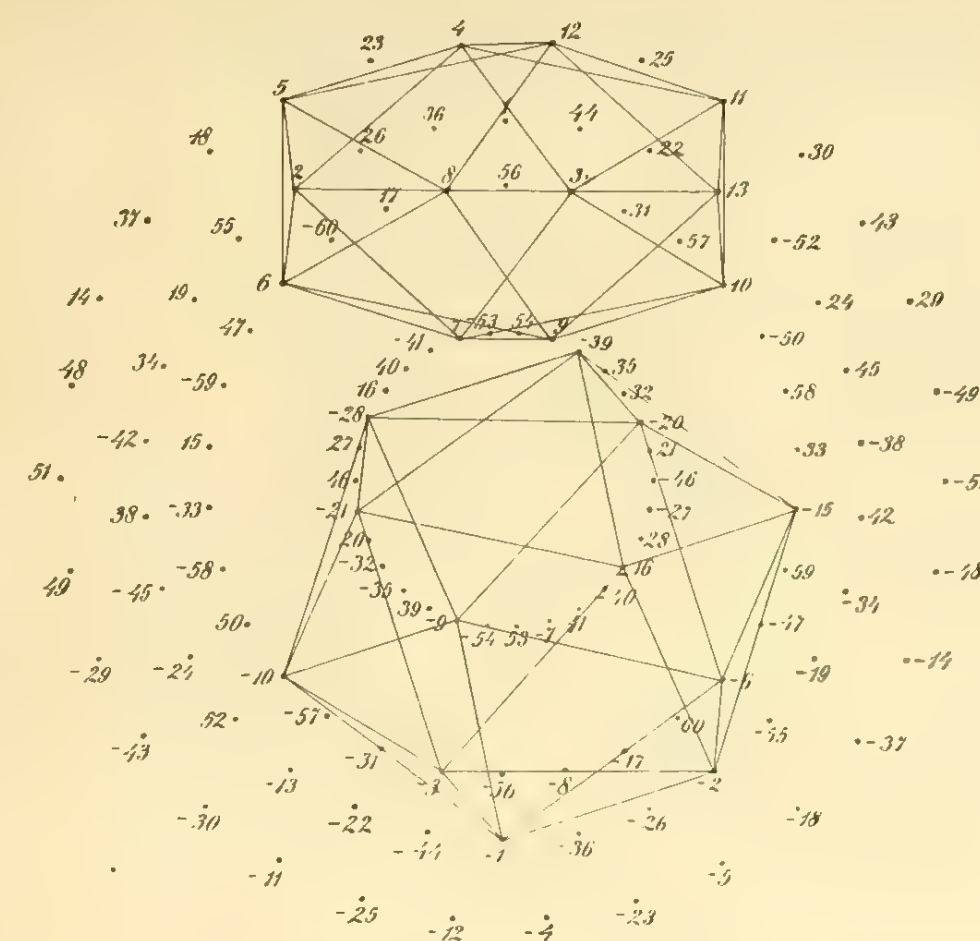
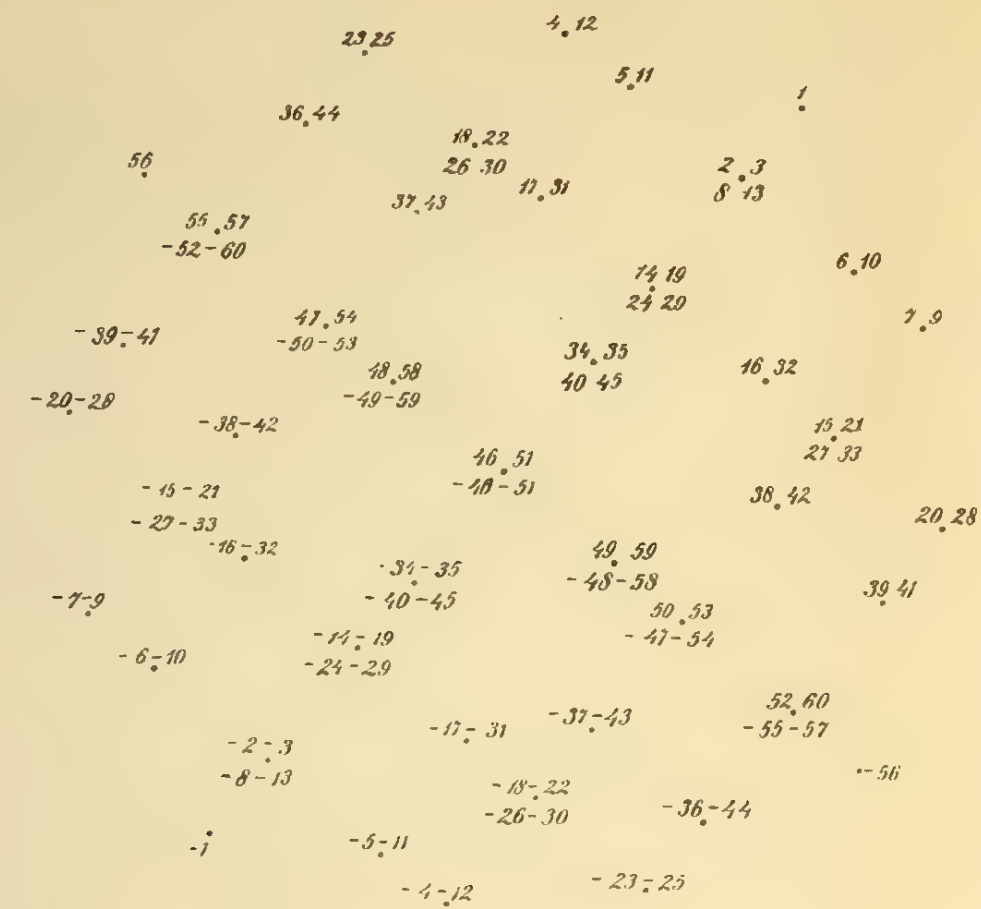
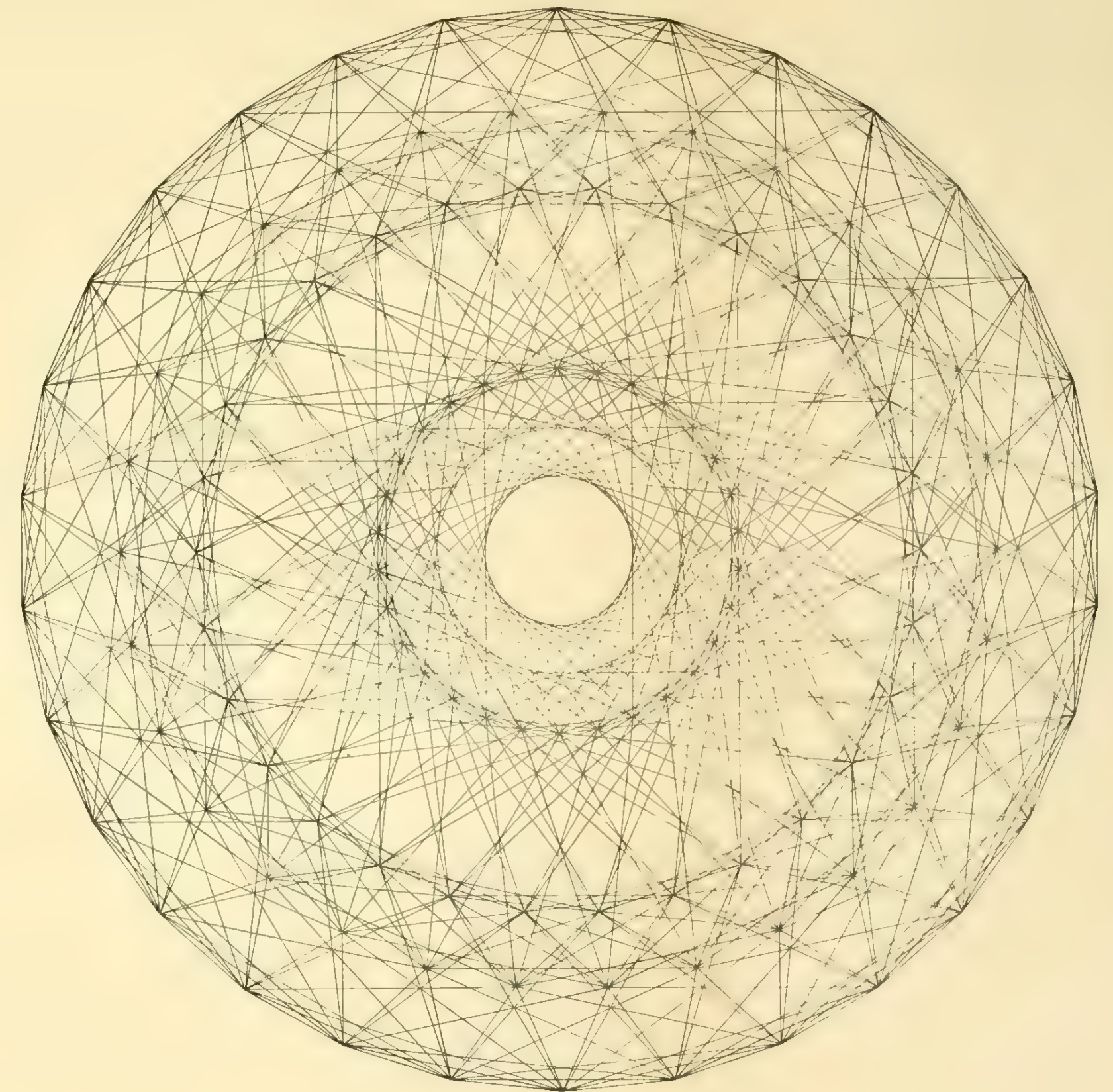




Z⁶⁰⁰

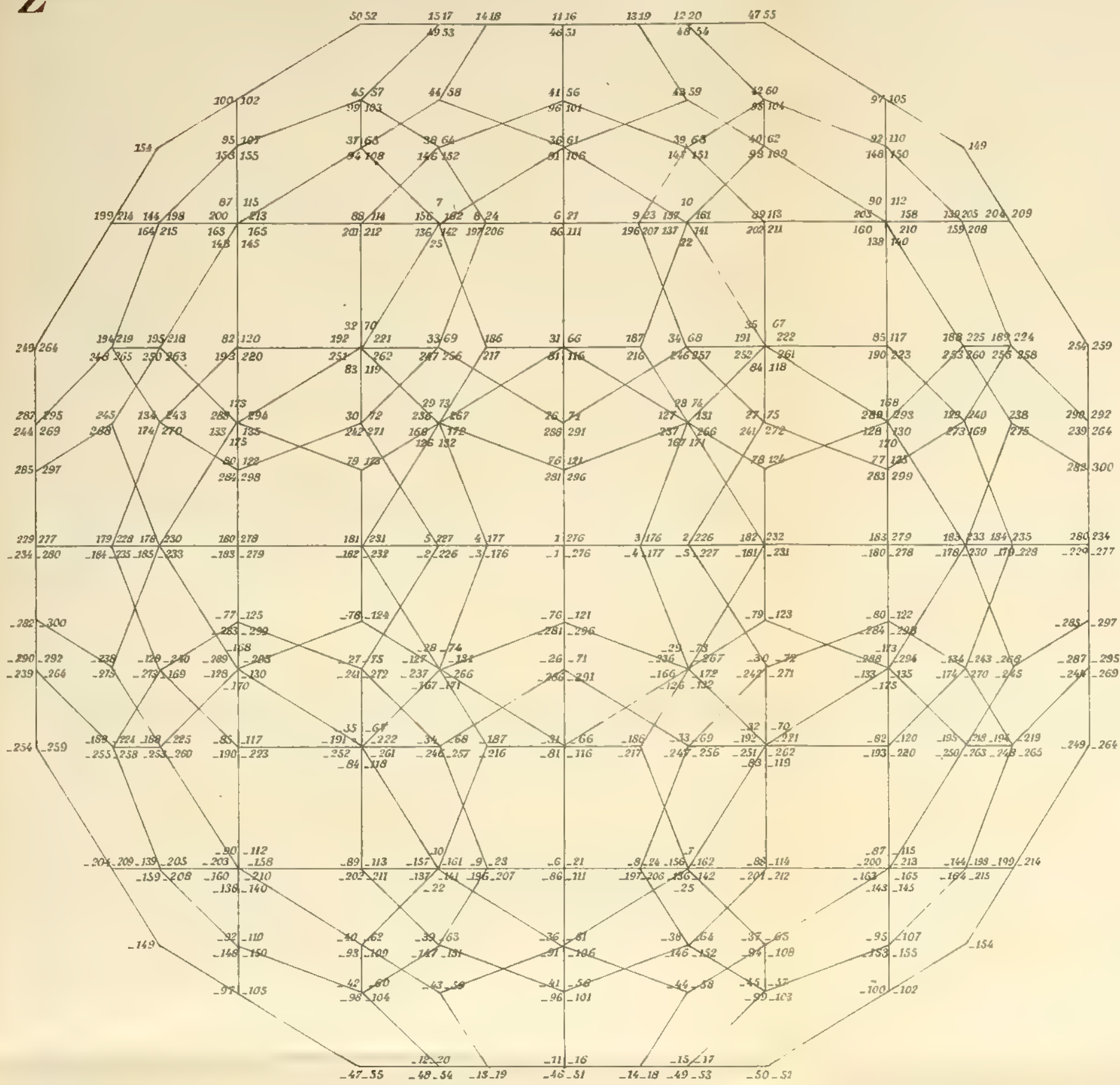
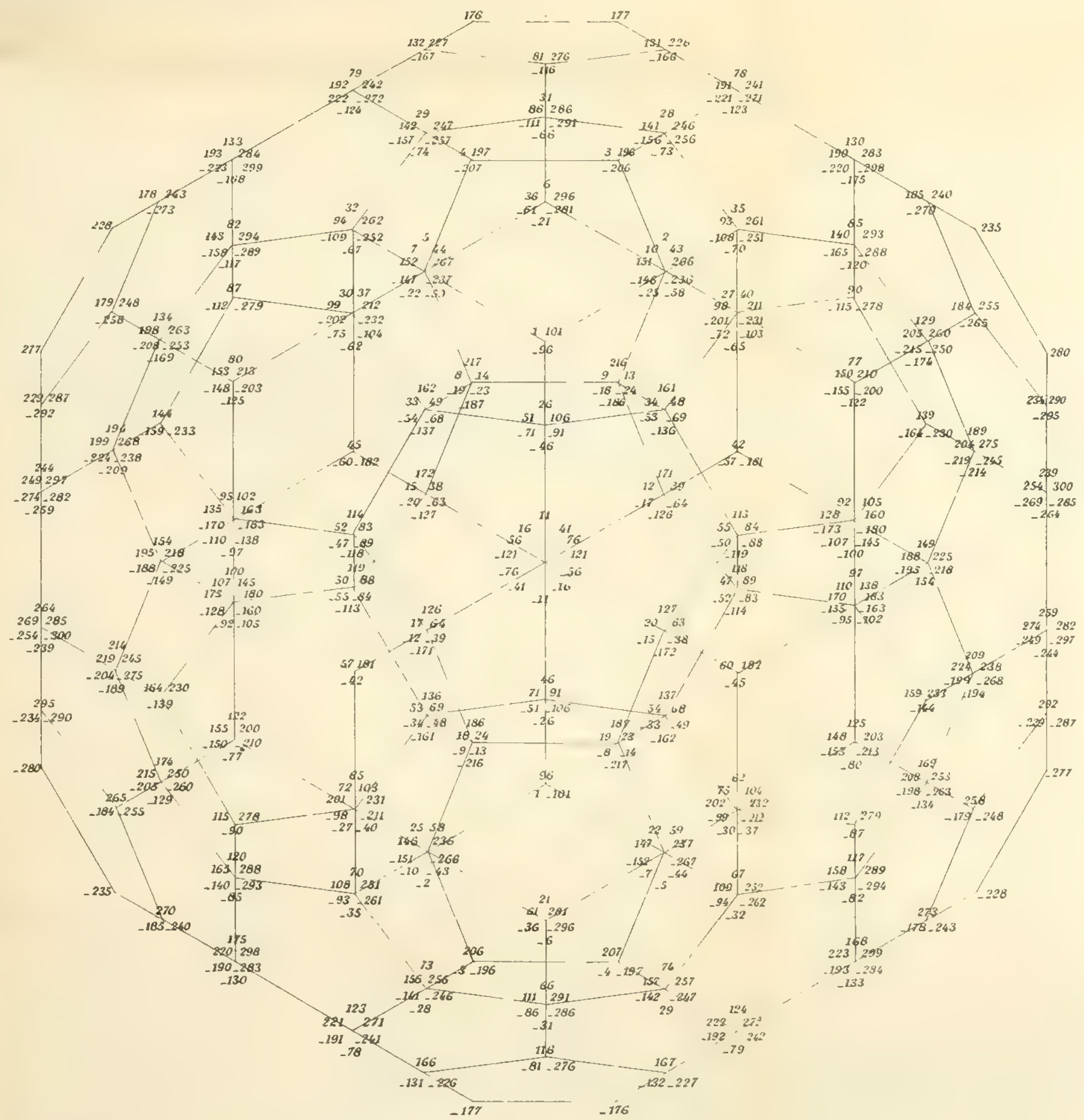
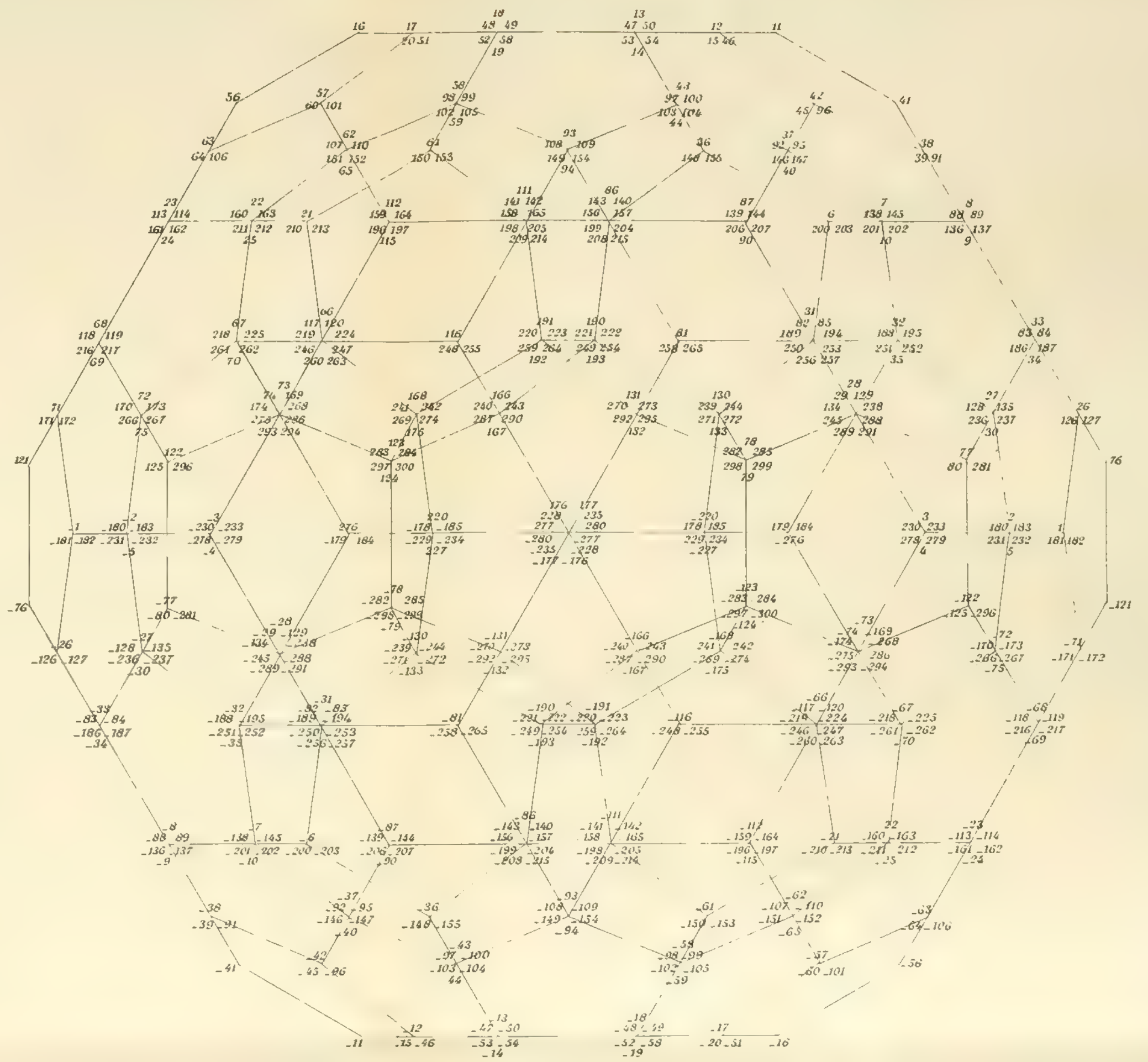


Z⁶⁰⁰Z⁶⁰⁰

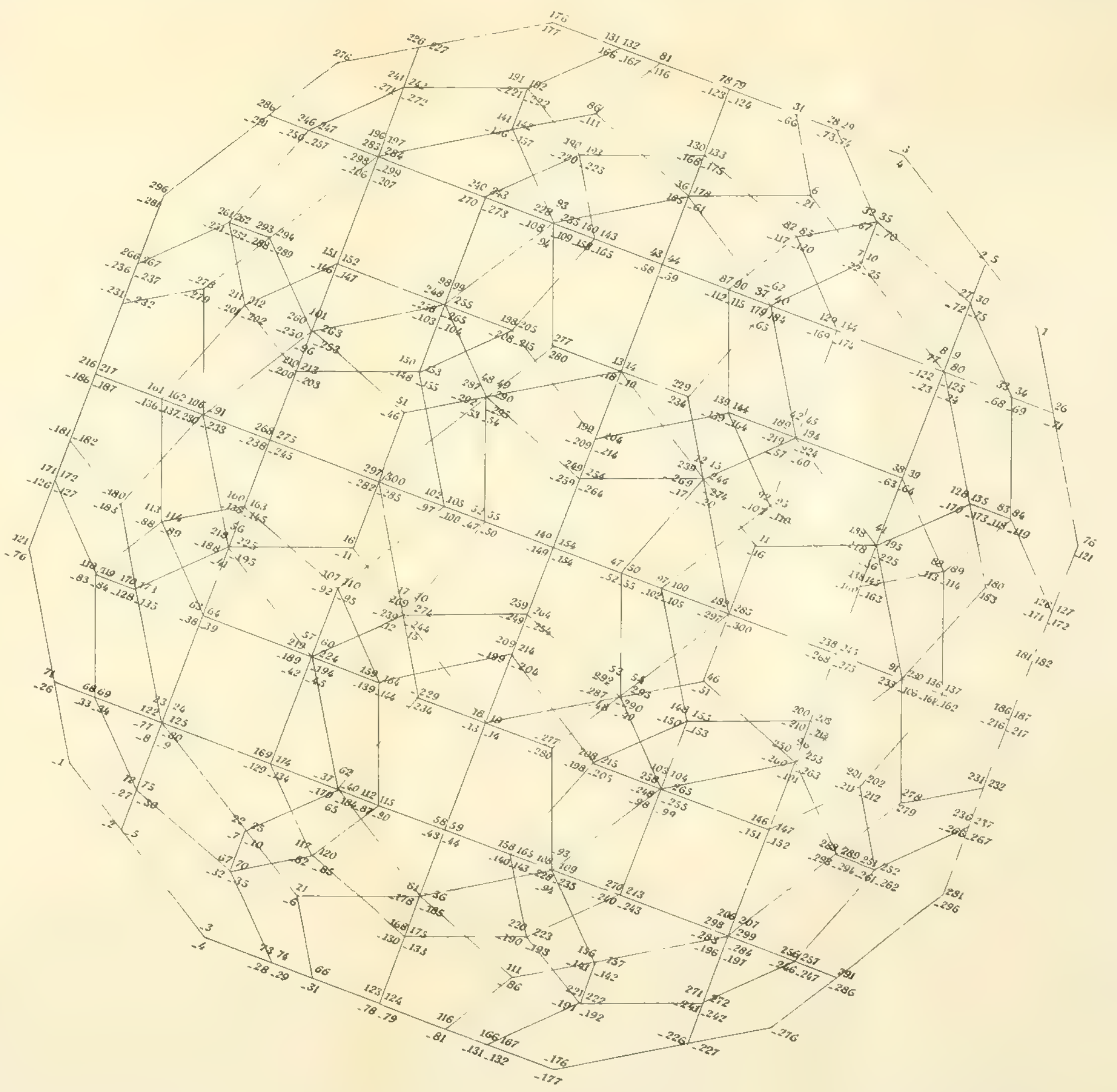
Z⁶⁰⁰Z⁶⁰⁰



*Z*¹²⁰

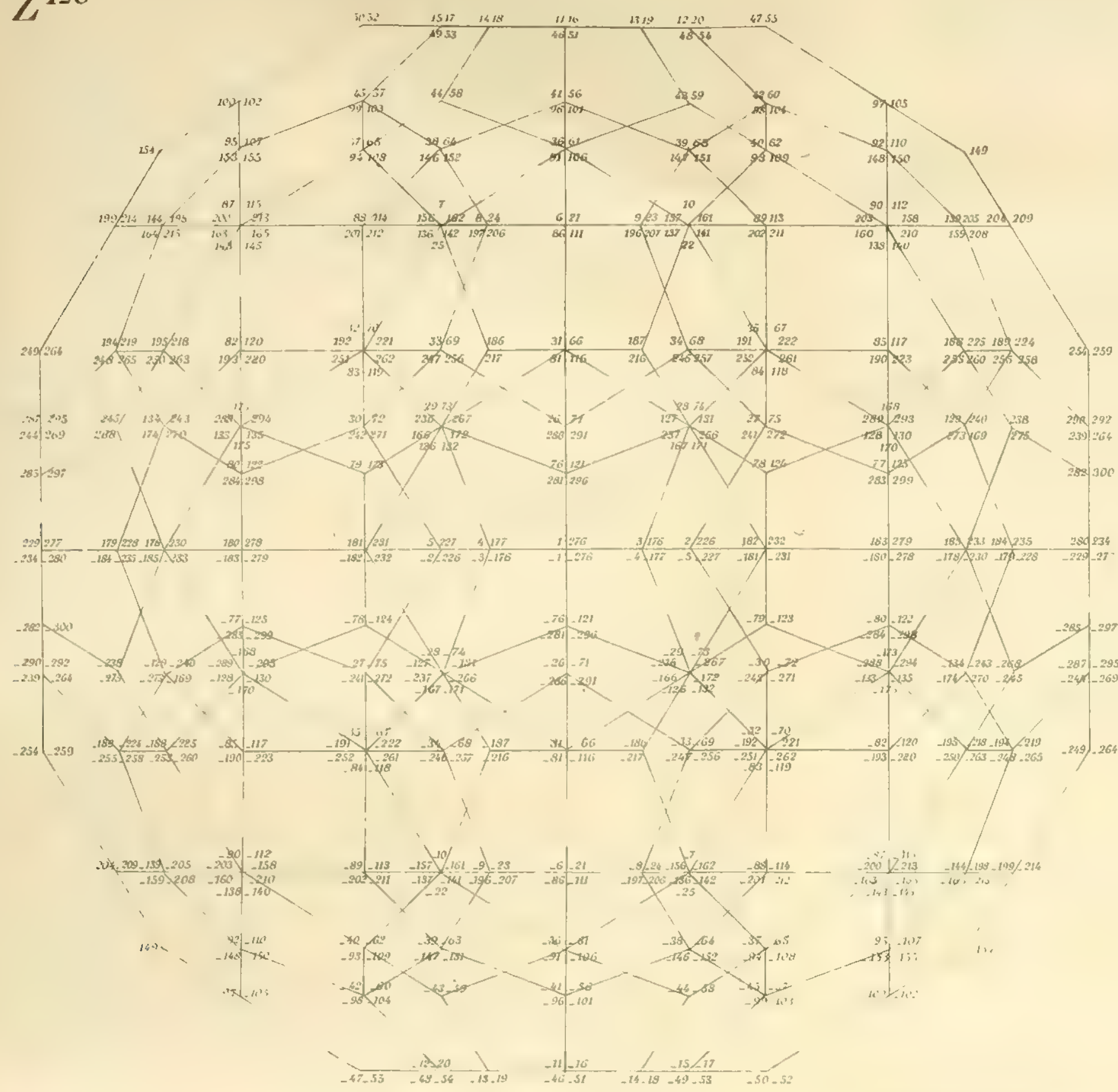

$$\overline{X_4}$$

$$|X_3$$


2

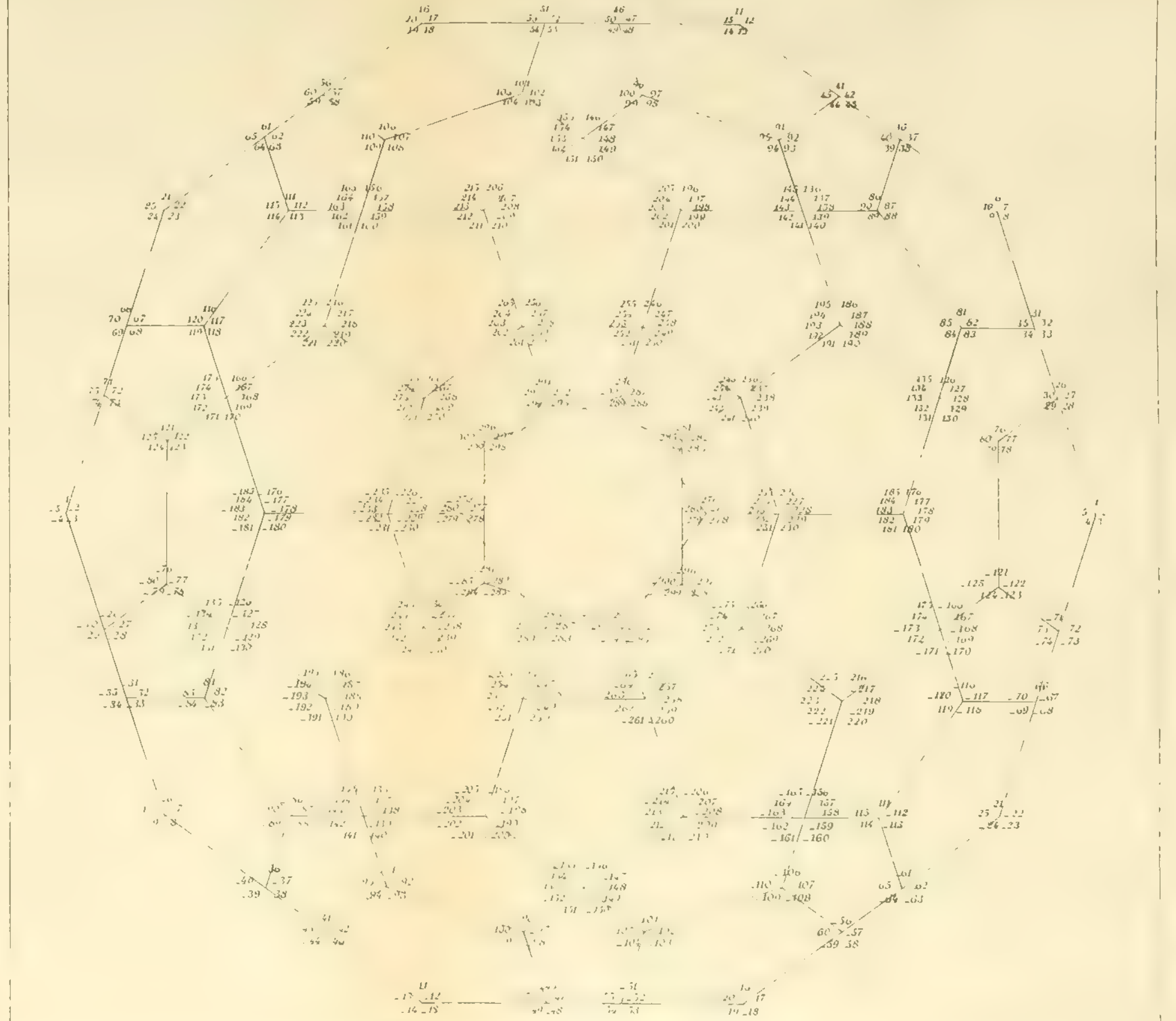


X,

Z¹²⁰

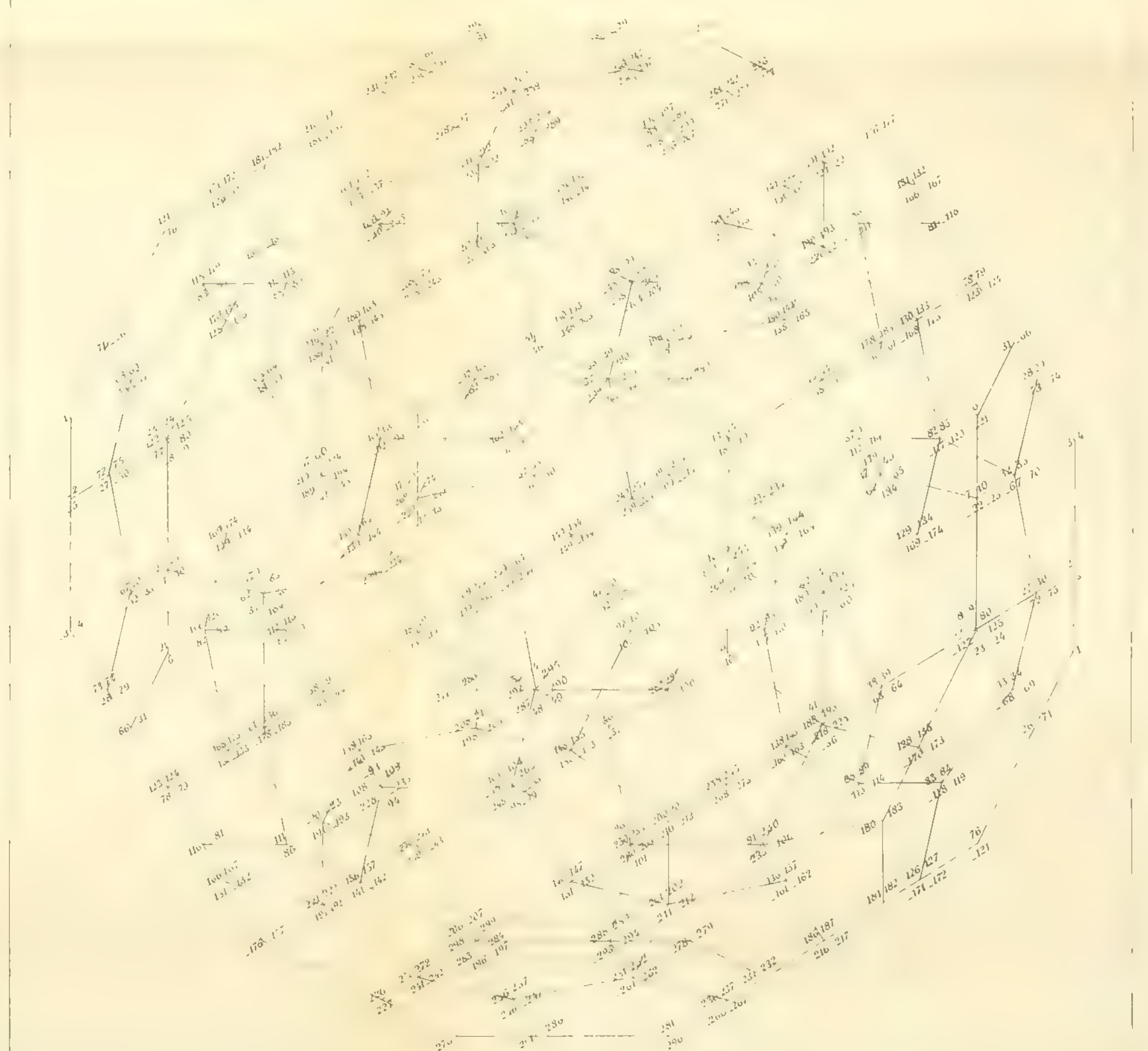


X₃



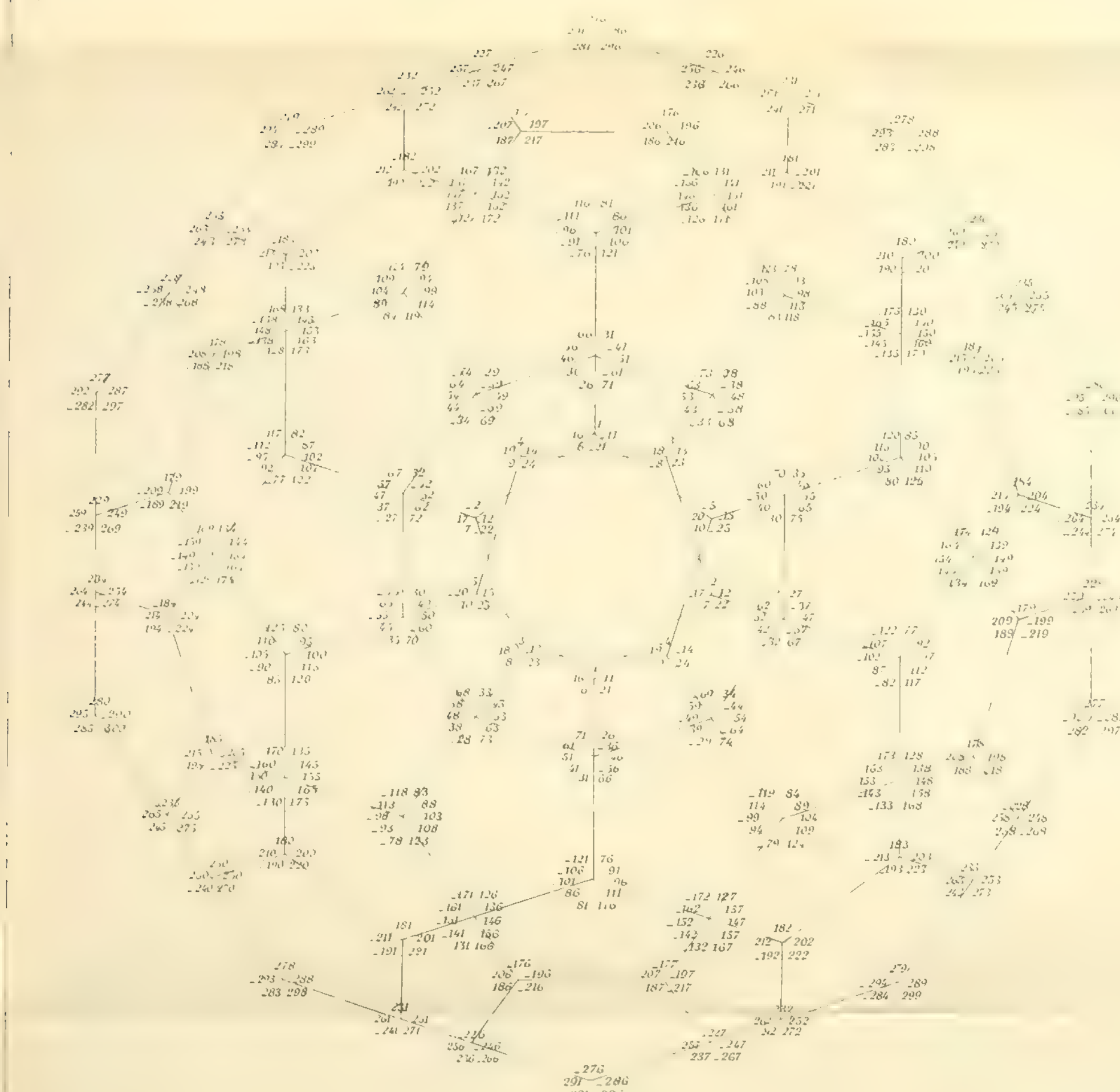
0

X₂



X₁

X₁







Over peroxy-zwavelzuur zilver
en
peroxy-azijnzuur zilver

(Zesde Verhandeling).

DOOR

E. M U L D E R.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DL. VII. N°. 2.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

Augustus 1899.

Over peroxy-zwavelzuur zilver

en

peroxy-azijnzuur zilver

(Zesde Verhandeling).

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DL. VII. N^o. 2.



AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

1899.

Over peroxy-zwavelzuur en peroxy-azijnzuur zilver

DOOR

E. MULDER.

(Zesde Verhandeling).

In deze Verhandeling zullen in de eerste plaats nieuwe gegevens worden medegedeeld met betrekking tot de samenstelling van *peroxy-zwavelzuur zilver*, steunende op een betrekkelijk beteren grondslag, dank zij de meer of min methodische wijzigingen in de bereiding aangebracht. Genoemde gegevens zullen worden gevolgd door voorloopige uitkomsten betreffende de electrolyse van *azijnzuur zilver*, al dadelijk hierom van gewicht, daar hiermede het onderhavige onderwerp (te weten, de verbindingen van zilverbioxyde, $Ag_2 O_2$, met *oxy*-zuren van zilver) van nu af aan, is gebracht op het gebied der *koolstof*verbindingen, en als gevolg daarvan, meer beteekenis heeft verkregen. Trouwens was deze uitbreiding van het onderwerp niet onverwacht, en reeds in de vorige Verhandeling als waarschijnlijk aangekondigd.

Over de omstandigheden, die van invloed kunnen zijn op de hoeveelheid en hoedanigheid van het peroxy-zwavelzuur zilver, en overeenkomstige verbindingen. Al is de opbrengst als zoodanig van ondergeschikte beteekenis, toch is vroeger gebleken bij de electrolyse van zwavelzuur zilver, en zal later in sterkere mate blijken bij de electrolyse van azijnzuur zilver, dat de *hoeveelheid* van het product van belang kan zijn, en wel vooral, wanneer het bezwaar zich voordoet, om zich de hoeveelheid stof te verschaffen, gevorderd

voor een nauwgezette analyse. En men vangt bijgevolg aan met de vraag naar de

Opbrengst. De hoeveelheid aan product, afgezet op de anode, hangt af (onder overigens gelijke omstandigheden) van:

1°. de intensiteit van den electrischen stroom;

2°. de concentratie (of de hoeveelheid zout, in de eenheid van volumen der oplossing voorhanden, onderworpen aan electrolyse). Maar genoemde hoeveelheid is tevens afhankelijk:

3°. van de oppervlakte der anode (de kathode is geacht een buitengemeen groote oppervlakte te hebben);

4°. van de ontledings-snelheid der zwarte stof van electrolyse als zoodanig (verondersteld, dat deze niet in contact is met de oplossing);

5°. van de ontledings-snelheid dezer zwarte stof, te weten geplaatst zijnde onder omstandigheden, zooals zich die voordoen bij de electrolyse, dus in de eerste plaats in aanraking zijnde met de oplossing, dat van betrekkelijk grooten invloed zal zijn op deze snelheid.

6°. van den tijd voor de bereiding genomen; in dien zin op te vatten, dat de *grootte der kristallen* enz. invloed kan hebben op den tijd, die wordt gevorderd, en wederkeerig, zij dit voor de eenheid in gew., namelijk voor 1 gr.. De invloed van den tijd is dus niet te nemen in de gewone beteekenis, wanneer de tijd op eenvoudige wijze afhangt van de hoeveelheid aan productie. In 't algemeen zal de ontledings-snelheid (zie onder 5°) in een omgekeerde reden staan tot de grootte der kristallen, en derhalve de opbrengst in een rechte reden met deze grootte; onder anderen, omdat het lichaam, waarvan sprake is, de functie vervult van *anode*, en de oplossing als zoodanig in dat geval in mindere mate een storenden invloed zal uitoefenen.

7°. van de snelheid van *neutralisatie* van het zuur door electrolyse vrij gekomen, en bij gevolg van de daarbij gevolgde methode, bv. of de neutralisatie plaats heeft met koolzuur zilver of op een andere wijze (zie later).

8°. van de temperatuur, waarbij de electrolyse plaats heeft; en daarenboven nog van vele andere invloeden.

Hoedanigheid (te nemen in den zin van zuiverheid). Deze is afhankelijk (onder overigens dezelfde omstandigheden):

1°. in de eerste plaats van de verhouding tusschen de *hoeveelheid* van het electrolytische product in de eenheid van tijd, en de hoeveelheid *zuurstof*, vrijgemaakt bij electrolyse in dien tijd.

2°. bij gevolg (zie hierboven, opbrengst) is de *hoedanigheid* (zui-

verheid, samenstelling) van het product van electrolyse in 't algemeen afhankelijk van dezelfde factoren, waarvan de hoeveelheid afhangt aan product van electrolyse (of de opbrengst zoo genoemd).

Dit zoo zijnde, moet daartoe ook de grootte der kristallen worden gebracht en vele andere invloeden (zie hierboven bij „opbrengst”). Het is overigens duidelijk, dat het geheel (hetzij opbrengst of hoe-danigheid van het product van electrolyse) afhankelijk is van de verhouding tusschen *de snelheid van ontleding*, wel te verstaan onder de omstandigheden bij de electrolyse, en *de snelheid van vorming* (opbrengst); terwijl de grootte der kristallen nog een rol heeft te vervullen bij het wasschen, en de analyse van het product. De grootte nu der kristallen, reeds eenige malen genoemd, hangt af van invloeden, als intensiteit van den stroom, concentratie, vorm en oppervlakte der anode, snelheid van ontleding gedurende de electrolyse, enz..

Bijkans al deze grootheden (factoren) „als de intensiteit van den stroom, de concentratie, de drie gemelde snelheden hierboven, de tijd, de grootte der kristallen, de temperatuur (te vermeerderen met den druk) enz., hangen *in 't algemeen* van elkander af, zóódanig, dat ieder dezer afhangt van de som der anderen. Maar dit neemt niet weg, dat, als factoren der eerste orde zouden kunnen worden aangemerkt (werkende bij gewone temperatuur):

- 1°. de *intensiteit* van den electrischen stroom;
- 2°. de *concentratie* der oplossing;
- 3°. de *snelheid van neutralisatie* der oplossing gedurende de electrolyse; en eindelijk

4°. de *tijd* te weten in den zin boven gegeven (zie pag. 4); en deze factoren vooral wenschte men in 't kort te bespreken met 't oog op *opbrengst* en *samenstelling* van het product van electrolyse. *Intensiteit.* Voor 't oogenblik zal men hierbij niet blijven stilstaan, aangezien de thermo-electrische batterij ¹⁾ in gebruik, zeer wel schijnt te beantwoorden aan het voorgestelde doel in de onderhavige gevallen, terwijl de intensiteit van dien aard is, dat wordt verkregen:

- a. het ontstaan van kristallen eener voldoende afmeting;
- b. bijgevolg een voldoende samenhang der moleculen van de gevormde verbinding;

¹⁾ Zie Verhand. d. Koninkl. Akad. v. W. t. A. (Eerste Sectie), Deel III, N°. 8, pag. 5 (1896).

c. en in 't algemeen een gunstige verhouding met betrekking tot vorming der zwarte stof, en ontledingssnelheid (gedurende de electrolyse), lettende op het *zuur*, dat vrij komt, hetzij als gevolg der electrolyse als zoodanig, hetzij als gevolg der vorming van het zwarte lichaam aan de anode.

Neutralisatie. In geval van electrolyse van zwavelzuur zilver, en zooals later nog duidelijker zal blijken bij electrolyse van azijnzuur zilver, moet de oplossing volstrekt worden *geneutraliseerd*, welke oplossing voortdurend zuur wordt gemaakt bij electrolyse (zie boven), zoodat het neutraliseeren evenzoo zonder afbreking moet geschieden. Maar dit sluit niet buiten, de aanname van het bestaan van een systeem van evenwicht, daarin tevens opgenomen zijnde de aanwezigheid van een zekere hoeveelheid aan *vrij zuur*, aangezien als gevolg der hoofdreactie zuur wordt vrijgemaakt in betrekkelijk groote hoeveelheid. Men zal later op deze zaak terugkomen en dan zien, dat gezegd systeem van evenwicht, onder anderen, afhankelijk is van den aard van het zout, dat aan de electrolyse wordt onderworpen.

Concentratie. Een zeer belangrijke factor, zooals zich laat begrijpen; en men moet trachten, als altijd binnen zekere grenzen, een maximum van zout te geven aan de electrolytische zuurstof, in de eenheid van tijd. Toch huiverde men in den aanvang bij de electrolyse van *zwavelzuur zilver*, om zich te bedienen van een verzadigde oplossing van dit zout, en wel uit vrees, van een weinig er van afgezet te zien worden; evenwel bestond het voornemen, dit punt later experimenteel te vervolgen. En dan zal blijken, dat de analytische gegevens spreken voor het gebruiken eener *verzadigde* oplossing van het zout, aan electrolyse onderworpen, en in de eerste plaats van *zwavelzuur zilver*. En toen de eerste stap in deze richting was gedaan, kon men zich een tweeden veroorloven, en dat, met te maken, dat de oplossing *verzadigd bleef*, door deze, gaande van de *anode* naar de *cathode*, twee filtra te laten passeeren, zijnde het eerste voorzien van koolzuur zilver ter neutralisatie, en het tweede van *zwavelzuur zilver*, met het doel, de oplossing meer of min *verzadigd* te houden (zie over dit punt later meer uitvoerig, met 't oog op analyses van producten naar deze nieuwe methode verricht).

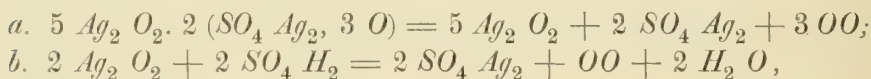
Tijd. Toen in den aanvang bij de studie van het lichaam, waarvan sprake is, werd uitgegaan van een *half* verzadigde oplossing, was men vrijwel beperkt met betrekking tot den tijd, voor de electrolyse te nemen, lettende op de hoeveelheid *zwavelzuur zilver*, dat deel uitmaakt van het zwarte lichaam, aangezien de concentratie bij voortduring afneemt. Daarentegen laat een verzadigde oplossing

een langeren duur toe; maar door de oplossing *verzadigd te houden* tijdens de electrolyse, is de tijd geen factor meer van beteekenis, maar veeleer een factor in de gewone beteekenis te nemen (zie vroeger).

Vergelijking der electrolyse van zilvernitraat met die van zwavelzuur zilver. Duidelijkshalve vergelijken we deze twee zouten, aan electrolyse onderworpen, een waarvan, namelijk het zilvernitraat, zich daartoe bij uitstek leent, daar de kleine kristallen zich ophoopen tot naalden, die zich vertakken, en betrekkelijk nog al groot zijn, en in een waarlijk verbazende hoeveelheid ontstaan; terwijl men de naalden ziet gevormd worden en vallen nabij de anode op den bodem van het kleine (glazen) vat, waar de kristallen, de rol vervullende van *anode*, in massa toenemen. Men heeft dan ook in even zooveel uren ongeveer, als zwavelzuur zilver dagen vordert, een hoeveelheid peroxy-salpeterzuur zilver, in ieder opzicht het product der electrolyse van zwavelzuur zilver overtreffende. En welke is de eerste oorzaak van dit verschil, terwijl men uitgaat van een electrischen stroom met dezelfde intensiteit (genoegzaam; en wel bij gewone temperatuur, en eenzelfde inrichting van den toestel, uitgezonderd het neutraliseeren, ingeval men werkt met zwavelzuur zilver)? Deze is in de eerste plaats te zoeken in het verschil in *concentratie*, die bij *zilvernitraat* bijkans onbegrensd is, daarentegen zeer beperkt bij *zwavelzuur zilver*. Van daar waarschijnlijk een zeer groot geleidingsvermogen voor den electrischen stroom bij zilvernitraat en een geringe geleidbaarheid bij zwavelzuur zilver. De proef toch is in de eerste plaats gebaseerd op de geleidbaarheid der oplossing voor den galvanischen stroom; hoe grootter het geleidingsvermogen is, hoe minder weêrstand valt te overwinnen voor den stroom. Het groote verschil in *concentratie* maakt het daarenboven zeer duidelijk, waarom geen sprake behoeft te zijn van neutraliseeren bij electrolyse van *zilvernitraat*, en dit daarentegen een volstrekt vereischte is in geval van electrolyse van *zwavelzuur zilver*. Dit is een gevolg daarvan, dat het systeem van evenwicht (gedurende de electrolyse) de aanwezigheid toelaat van betrekkelijk meer zuur als gevolg der aanwezigheid van *een grootere hoeveelheid salpeterzuur zilver*, terwijl integendeel betrekkelijk *weinig zwavelzuur zilver* voorhanden is, en wel ongeveer *honderdmaal* ¹⁾ *minder*, dat, om zoo te zeggen, alles verklaart, met 't oog op onze kennis van het scheikundig evenwicht.

¹⁾ Zie deze Verhand. D. VI, n°. 5, pag. 48.

Nogmaals over hoeveelheid en hoedanigheid van het electrolytisch product. Terugkomende op het onderwerp, dat ons bezig houdt, zoo zij opgemerkt, dat het *maximum in opbrengst* zich zal vertoonen ingeval van een maximum van concentratie, verondersteld genoegzaam constant gehouden; zoodat men niet bepaald gebonden is aan lengte van tijd (zie vroeger en later). Ook zal men alsdan (onder overigens gelijke omstandigheden) het maximum verkrijgen in intensiteit van den electrischen stroom. En wat betreft de *zuiverheid* van het product, zij dit: $5 \text{ Ag}_2 \text{ O}_2, 2 (\text{SO}_4 \text{ Ag}_2, 3 \text{ O})$, dat alzoo wordt ontleed:



de ontledings-snelheid als zoodanig der stof zal niet veel invloed hebben op de zuiverheid van het product, veeleer die der ontleding in bijzijn der oplossing (verondersteld meer of min neutraal te zijn gehouden).

De grootte der kristallen (en der naalden door deze gevormd) kan ook wel ongeveer haar maximum hebben, in aanmerking genomen, dat de oplosbaarheid is beperkt, en daarin tot nog toe niet is te gemoet gekomen.

Over een nieuw beginsel, te brengen in den toestel. Zooals de toestel thans is ingericht, met de schroef van Archimedes, worden ongeveer 8 liters opgevoerd in 24 uur, of één dag (dag en nacht). Men dient evenwel te letten op de omstandigheden, die zich voordoen. In de eerste plaats wordt de oplossing nabij de *anode* opgepompt (de anode bestaat in een dunnen platinadraad), terwijl deze met het eene uiteinde drukt tegen den bodem van het kleine glazen schaalje, dit laatste geplaatst zijnde in de groote platina-schaal. Het kleine glazen vat is in gemeenschap met het groote vat door middel van de oplossing zelve, die hooger reikt dan eerstgenoemd vat. Men zal evenwel gedurende de electrolyse in 't algemeen betrekkelijk meer *vrij zuur* aantreffen bij de anode in het schaalje dan daar buiten nabij de kathode. En, wanneer wordt gezegd, dat in 24 uur 8 liters aan oplossing worden opgevoerd (die terugkeeren naar de kathode, na filtratie door *koolzuur zilver* ter neutralisatie, en bv. daarna komen op een *tweede* filtrum met *zwavelzuur zilver*), moet dit wel in aanmerking worden genomen.

Wat men wenschte op te merken, met betrekking tot het aanbrengen van een ander beginsel, is het volgende, namelijk, dat men

niet gebonden is bepaald aan een *neutraliseeren*, zij dit door koolzuur zilver, aangezien men het gebruik van een pomp kan ontgaan gedurende de electrolyse, dat in den grond op hetzelfde neerkomt (die werd aangewend met 't oog op een neutraliseeren). Het is toch duidelijk, dat men een *verzadigde* oplossing zou kunnen laten toevloeien, en dat bij voortduring en in dezelfde mate, om deze te zelfdertijd evenwel te doen afvloeien; de eerste bewerking geschiedt dan bij de *anode*, en de tweede nabij de *kathode* (of omgekeerd, dat wel geen noemenswaardig verschil zal uitmaken). Maar dit alles vordert een speciale inrichting, en een groote hoeveelheid *oplossing* (na de proef dan te neutraliseeren voor een volgende bereiding der zwarte stof).

Men zou evenwel ook een anderen weg kunnen inslaan, en de electrolyse doen plaats hebben in een *veel grooter bad der oplossing*, reeds vroeger ¹⁾ is een proef verricht, en wel aldus, dat het groote platina-vat (waarin het kleine glazen vat is geplaatst) werd gezet in genoemd groot bad; vertrouwende, zooals men zal begrijpen, op de *diffusie* van dat deel der oplossing, hetwelk *vrij zuur* bevat (als gevolg der electrolyse) en het andere deel van het bad.

Men heeft zich afgevraagd, of de eerste wijziging boven gegeven, niet een vrij belangrijk punt aanroert, betrekking hebbende op het onderwerp, dat ons bezig houdt (zij dit b. v. de electrolyse van zwavelzuur zilver), te weten de concentratie, of eigenlijk gezegd, *de snelheid van electrolyse*. De vraag deed zich voor, of men een dusdanige inrichting zou kunnen treffen, dat de electrolyse gemakkelijker plaats heeft, en dat door invoering van een nieuw beginsel, zij dit, om aan de oplossing, aan electrolyse onderworpen, een groote *snelheid* te geven (in welke richting nader na te gaan); terwijl overigens een versche oplossing (of een oplossing steeds gefiltreerd ter neutralisatie) bij voortduring wordt ingebracht en afgevoerd in eenzelfde mate. Op dit oogenblik zal hierop niet worden ingegaan, ook, omdat de aan te nemen *stroom* der oplossing ten deele afhankelijk is van de snelheid der ionen, den hoofdfactor der electrolyse.

Vervolg der proef betreffende Bereiding N°. 14. 2)

19 ^{de}	} maal; ongeveer 5 weken.		
20		0,0101 gr.	0,6068 gr.
21			

¹⁾ Zie deze Verhandeling d. Kon. Akad. v. W. t. A. Dl. VI. n°. 5, pag. 7.

²⁾ Zie de voorgaande Verhandeling. Er werd telkens behandeld met 10 c. c. water.

22 ^{ste}	maal; ongeveer		
23	5 weken.	0.0017 gr.	0.6085 gr.
24			
25			
26			
27		0.0018	0.6103
28			
29			
30			
31		0.0029	0.6132
32			
33			
34			
35		0.0034	0.6166
36			
37			
38			
39		0.0017	0.6183
40			
40	ongev. 10 weken.	0.0019	0.6228

Vervolg der proef betreffende Bereiding N°. 15. 1)

		Totaal.
19 ^{de}	maal 0.0035 gr.	0.7523 gr.
20	0.0029	0.7552
21	0.0014	0.7566
22	0.0027	0.7593
23	0.0023	0.7616.

Deze hoeveelheid van 0.7616 gr. werd bij gewone temperatuur behandeld met water; de oplossing daarna gefiltreerd door een klein filtrum (vooraf gewogen), en het filtraat vervolgens geplaatst onder een vacuum-exsiccator. Achtereenvolgens bleef terug, bij herhaling dezer bewerkingen:

		Totaal.
1 ^{ste}	maal 0.4697 gr.	0.4697 gr.
2 ^{de}	0.2402	0.7099
3	0.0182	0.7281
4	0.0037	0.7318
5	0.0029	0.7347
6	0.0014	0.7366.

¹⁾ Zie de vorige Verhandeling.

Terug bleef 0.0155 gr. en op het filtrum 0.0096 gr., zijnde alles te zamen 0.7617 gr. (zie boven 0.7616 gr.).

Het product van Bereiding N°. 15 was niet voldoende zuiver (bevattende 4.3 proc. aan gemakkelijk vrijkomende zuurstof), en de gevonden hoeveelheid aan zwavelzuur zilver is te hoog (gevonden 39.16 pc. op 0.7366 gr.).

Proef met bereiding N°. 19. Men volgde denzelfden weg als met bereiding N°. 17 (en N°. 18). Het doel beoogd bij de volgende proef is, den invloed te leeren kennen van *water* op het peroxy-zwavelzuur zilver, en dat wel bij gewone temperatuur; en de wijze van werken daarbij gevolgd was deze. Het *versch* bereide product (bijgevolg nog vochtig, want het was gewasschen met water op de gewone manier, tot zich geen reactie meer vertoonde in het waschwater met verdund zoutzuur) in gewicht *onbekend*, werd met water gebracht in een *schaaltje* (vooraf gewogen), het vocht afgeschonken daarna ongeveer 25 c. c. water toegevoegd, om het geheel eenige dagen te laten staan; en dit herhaald. De uitkomsten zijn hieronder gegeven:

	Tijd in dagen.	Zwavelzuur zilver.	Totaal.
1 ^{ste} maal	5	0.1474 gr.	0.1474 gr.
2 ^{de}	5	0.1443	0.2917
3	7	0.1038	0.3055
4	7	0.064	0.4595
5	7	0.0219	0.4814
6	7	0.0119	0.4933
7	6	0.0051	0.4984
8	59	0.0231	0.5215
9	7	0.0028	0.5243
10	27	0.0037	0.528
11	14	0.0047	0.5327
12	16	0.0022	0.5349
13	19	0.0018	0.5367
14	19	0.0024	0.5391
15	61	0.0041	0.5432
16	90	0.0064	0.5496.

Het terugblijvende in het glazen schaalte bedroeg 0.7394 gr., en op het filtrum 0.1328 gr., dus te zamen 0.8722 gr..

Het geneutraliseerd houden der oplossing ging betrekkelijk gemakkelijker bij bereiding N°. 19 dan dit het geval was bij vroegere

bereidingen. De aanleiding hiertoe was wel deze, dat het koolzuur-zilver na verloop van eenigen tijd meer korrelig wordt, of wellicht kristallijn ¹⁾, als gevolg waarvan de oplossing minder weêrstand ontmoet bij het filtreren. Ook werden niet zooveel spleten waargenomen in de geheele massa van koolzuur zilver, gelijk vroeger het geval was, wel te verstaan, nadat eenigen tijd was gewerkt. De uitkomst van alles is dus wel, een beter contact tusschen oplossing en koolzuur zilver, en als gevolg daarvan een betere neutralisatie.

Om terug te keeren tot de proef, zoo zij gezegd, dat men hiermede ook op 't oog *had*, het gehalte der zwarte stof aan *vrij* zwavelzuur zilver te leeren kennen; altijd verondersteld, dat het water *niet* merkbaar invloed uitoefent op de zelfontleding der zwarte stof (zooals dat het geval is bij peroxy-salpeterzuur zilver). Maar de proef leert ons integendeel dezen ontledenden invloed van het water kennen als betrekkelijk zeer aanmerkelijk.

Analyse van Bereiding N°. 22 (zie later over N°. 20 en N°. 21). Wijziging van den toestel ²⁾. De toestel onderging nog een wijziging, en wel met het doel, om eenige merkbare verandering in den verticalen stand der as van den cylinder te voorkomen (deel uitmakende van het uurwerk). De opmerking werd namelijk gemaakt, dat de beweegbare hefboom, bestemd voor den cylinder bij het opwinden, te lang was (als gevolg der wijze van inrichting van den geheelen toestel), en die fout had zich zeker vroeger doen gevoelen. Er werd nu in voorzien, door den hefboom te laten gaan door een ijzeren plaat (stevig bevestigd) als steunpunt. Sints dien tijd (de toestel was vooraf opnieuw uit- en in elkander gezet, en de cylinder verticaal geplaatst) werkt de toestel op een meer gelijkmatige wijze.

Bereiding van N°. 22. Deze geschiedde met een *verzadigde* oplossing. Nu de permanente neutralisatie weinig te wenschen overlaat, was het van betrekkelijk belang, te weten, of de concentratie merkbaren invloed heeft op de samenstelling van het product, en bijgevolg op de formule, terwijl de concentraties zijn terug te brengen tot de verhouding (zie vroeger) van 1:2. Aangezien de concentratie grooter was, vermeerderde de hoeveelheid der zwarte stof bij electrolyse (in de tijdseenheid), en bij electrolyse gedurende

¹⁾ Dict. Wurtz. Supplém. II, p. 364 (1892).

²⁾ Zie de voorgaande Verhandeling.

twee dagen (dag en nacht) kon men beschikken over 2.4588 gr. (en dat na overbrengen in de groote buis, dat niet geschiedt zonder eenig merkbaar verlies; zie b.v. vroeger Bereiding N°. 15, enz.). Men wilde nog doen opmerken, dat eenige oogenblikken vóór het einde der proef, de toestel in gebreke bleef, door een onbekende oorzaak (mogelijk is b.v., dat het ver uitstekende filtrum in aanraking kwam met de schoof van Archimedes).

De gemakkelijk vrijkomende zuurstof van oxy-zwavelzuur zilver y ($S O_4.z O. Ag_2$) werd bepaald. Nadat de hoeveelheid van 2.4588 gr. stof was behandeld met water onder verwarming, werd na verdampen van het water, het terugblijvende gewogen, en gevonden 2.3442 gr. dus een verschil gevende van 0.1146 gr. of 4.66 proc. aan gemakkelijk vrijkomende zuurstof.

Bereiding N°. 23. Geschiedde op dezelfde wijze, maar ditmaal zonder eenige afwijking. Er werd uitgegaan van 3.3163 gr. stof (overgebracht zijnde in de groote buis). De opbrengst was derhalve betrekkelijk grooter (er ging ongeveer evenveel verloren), wel het gevolg daarvan, dat de oplossing meer geheel was verzadigd bij den aanvang der electrolyse, terwijl de oplossing gedurende de zomermaanden met een overmaat aan zwavelzuur zilver had gestaan.

Voor de gemakkelijk vrijkomende zuurstof werd gevonden 0.1493 gr. (namelijk 3.3163 gr. — 3.167 gr.), of 4.5 pc.. Er werd dus geen stap vooruitgegaan; wellicht als gevolg der grootere hoeveelheid stof aan de anode afgezet, zoodat de hoeveelheid aan electrolytische zuurstof niet toereikend was, om meer of min het evenwicht te handhaven (met betrekking tot vorming en ontleding).

Bereiding N°. 24. De omstandigheden waren dezelfde, met uitzondering van den duur der proef, die thans bedroeg drie dagen (dag en nacht), in plaats van twee dagen, zooals bij N°. 23. De hoeveelheid stof in de groote reageerbuis, bedroeg 3.2699 gr., bij de behandeling met water, onder verwarming enz., verliezende 0.124 gr., beantwoordende aan 3.79 proc. aan gemakkelijk vrijkomende zuurstof (zooals bekend van oxy-zwavelzuur zilver). De duur der proef was dus bepaald te lang, dat ten gevolge heeft een betrekkelijk te groote vermindering in concentratie, enz., en men sloeg bij gevolg veeleer den omgekeerden weg in.

Bereiding N°. 25. De electrolyse werd slechts één dag aangehouden (dag en nacht), ten einde wellicht onder meer gunstige omstandigheden te mogen werken, wat betreft de zuiverheid van

het product. De hoeveelheid was die van 1.3835 gr. (niet medegerekend de kleine hoeveelheid, die bij het wasschen verloren ging). Na behandeling met water onder verwarming (dat 5 dagen in beslag nam) werd ingedampt in een vacuum-exsiccator (eischende 19 dagen). In de groote buis bleef toen terug 1.3165 gr., bij gevolg een verschil gevende van 0.067 gr., of een verlies van 4.84 p.c. aan gemakkelijk vrijkomende zuurstof (zijnde die van oxy-zwavelzuur zilver, $y(SO_4. zO. Ag_2)$). Dat is het *maximum* tot nog toe verkregen (de grootste waarde was die van 4.73 pc.; zie Bereiding N°. 18), en het is dus mogelijk, dat men een stap heeft gedaan in de goede richting, want een maximum aan gemakkelijk vrijkomende zuurstof komt blijkbaar overeen met een maximum aan zuiverheid.

Nadat de zuurstof was verwijderd, werd bij het terugblijvende (zijnde dit 1.3165 gr. stof) water gedaan, en daarna eenig salpeterzuur, onder verwarming, tot dat het zilverbioxyde was omgezet in *zilvernitraat*, waarna de oplossing (alles geschiedt in dezelfde buis) werd geplaatst onder een vacuum-exsiccator (bevattende tevens ongebluschte kalk). Er bleef terug 1.6459 gr. aan stof (zijnde een mengsel van zwavelzuur en salpeterzuur zilver), dat een verschil in gewicht geeft van 0.3294 gr. (voor de eerste behandeling werden 2 dagen vereischt, en voor het verdampen 23 dagen, dus alles te zamen 48 dagen).

Dezelfde methode van berekening volgende als vroeger ¹⁾:

$$\begin{array}{cc} \text{verschil} & \text{zilverbioxyde} \\ 91.8 : 0.3294 = 247.24 : x, \end{array}$$

dus gevende voor de waarde van $x = 0.8865$ gr., wel te verstaan *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$), bevat in 1.3885 gr. van het oorspronkelijke zwarte product, of 64.07 proc.. Het gehalte van zwavelzuur zilver blijkt uit het verschil van 1.3165 gr. — 0.8865 gr. = 0.43 gr. Bijgevolg is de samenstelling:

gemakkelijk vrijkomende zuurstof	
van $y(SO_4. zO. Ag_2)$	0.067 gr.
zilverbioxyde	0.8865
zwavelzuur zilver	0.43

Som 1.3835 gr., zijnde de hoeveelheid

¹⁾ Zie Verhand. d. K. Akad. v. W. (Eerste Sectie), Dl. VI. N°. 5 p. 23 (1898).

stof, waarvan werd uitgegaan. Berekend op 100 gew. - *d.* der zwarte stof geeft dit:

5 $Ag_2 O_2$. 2 (SO_4 . 3 O . Ag_2) eischt:

gemakkelijk vrijkomende zuurstof van

y (SO_4 . zO . Ag_2)	4.84	4.90
zilverbioxyde	64.07	63.26
zwavelzuur zilver	31.09	31.84
100.	100.	100.

Van alle analyses tot nog toe gedaan, komt deze het best overeen met de voorgestelde formule (zie de voorgaande Verhandeling). En, daar de gemakkelijk vrijkomende zuurstof betrekkelijk het maximum bereikt, is het product dezer Bereiding te beschouwen als zijnde betrekkelijk het zuiverst van de producten tot nog toe gemaakt; zoodat deze numerique uitkomsten kunnen geacht worden te pleiten voor de gestelde formule (zie boven).

Het zou wellicht eenigszins kunnen bevreemden, dat, terwijl wordt uitgegaan van een *verzadigde* oplossing, het gehalte aan zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) wat hooger is dan door de formule wordt gevorderd, en bijgevolg het gehalte aan zwavelzuur zilver ($SO_4 Ag_2$), op indirecte wijze bepaald, wat te laag. Juist het tegenovergestelde neemt men waar bij de analyses ¹⁾ van producten met een half verzadigde oplossing. Voor 't oogenblik kan daaromtrent alleen worden opgemerkt, dat gezegd verschil betrekkelijk klein is, en de gevolgde methode ter analyse fouten met zich brengt, die niet voldoende bekend zijn.

Over een verandering, die werd aangebracht. Bereiding N°. 26. Er werd uitgegaan van een verzadigde oplossing, evenals in de laatste bereidingen; maar, om de oplossing *verzadigd te houden*, liet men de oplossing, na te zijn geneutraliseerd (gegaan zijnde door een filtrum met koolzuur zilver), gaan door een ander filtrum met *zwavelzuur zilver*. De proef werd één dag aangehouden (*dag en nacht*). De hoeveelheid stof in de groote buis bedroeg 0.7831 gr., dus betrekkelijk weinig, en dit wel als gevolg van een betrekkelijk groot verlies bij het wasschen, door een te groote verdeeling der stof. Deze hoeveelheid werd geacht te gering te zijn voor een nauwkeurige analyse, reden waarom deze proef op gelijke wijze werd herhaald.

¹⁾ Verhand. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie), Dl. VI. N°. 5. p. 43 (1898).

Bereiding N°. 27. Alleen werd wat meer koolzuur zilver gedaan op het eerste filtrum (en zwavelzuur zilver op het tweede filtrum; zie boven). De proef duurde overigens evenzoo één dag (dag en nacht). De hoeveelheid stof, wel te verstaan na te zijn overgebracht in de groote buis, bedroeg 1.5432 gr. (er ging betrekkelijk veel minder verloren bij het wasschen, daar de kristallen betrekkelijk beter waren gevormd). Na verhitten met water en plaatsing in een vacuum-exsiccator, werd het gewicht herleid tot 1.4695 gr., zoodat het verlies bedroeg 0.0737 gr., zijnde dit de gemakkelijk vrijkomende zuurstof van het oxy-zwavelzuur zilver, deel uitmakende van het peroxy-zwavelzuur zilver, dus bedragende 4.77 proc.; dat een betrekkelijk gunstig resultaat is te noemen, al is het gehalte iets lager dan dat van Bereiding N°. 25 (zie pag. 22). Er werd met water verhit 5 dagen, terwijl het verdampen onder den exsiccator 18 dagen vereischte.

Bereiding N°. 28. Terwijl zoo goed als zeker een stap is gedaan in de goede richting, zoowel met betrekking tot de zuiverheid van het product als tot de hoeveelheid, voor een nauwkeurige analyse ruimschoots voldoende, wilde men het thans ook wagen, den tijd te verlengen, dat na de aangebrachte wijziging kan gedaan worden, omdat de concentratie genoegzaam dezelfde blijft.

Met eenzelfde oplossing werkende, en met inachtneming der medegedeelde wijze van neutralisatie en verzadiging (zie Bereiding N°. 26 en 27), en dat gedurende twee dagen (dag en nacht), werd in de groote buis aan stof verkregen 2.3352 gr.; herleid, na verhitten met water enz., tot 2.2265 gr., dat een verlies beteekent van 0.1087 gr. of 4.65 proc. (er werd 6 dagen verhit, terwijl het verdampen onder den vacuum-exsiccator 14 dagen vorderde).

Bereiding N°. 29. De hoeveelheid stof, na overgebracht te zijn in de groote buis, was die van 2.9552 gr., bij verhitten met water verliezende 0.1167 gr. of 3.94 proc., een vrij ongunstige uitkomst. Dit is waarschijnlijk het gevolg van den langen duur der proef, zijnde die van drie dagen (dag en nacht), en dat wel met een verzadigde oplossing, die tevens meer of min verzadigd werd gehouden door een filtrum met zwavelzuur zilver. Daaruit zou kunnen volgen, dat de hoeveelheid electrolytische zuurstof niet toereikende was, om het verlies in zuurstof te herstellen van het zwarte product; te weten onder de omstandigheden, die zich voordoen, wat aangaat graad van concentratie, galvanischen stroom, enz..

Bereiding N°. 30. Geschiedde op dezelfde wijze. De hoeveelheid zwarte stof in de groote reageerbuis bedroeg 1.1138 gr. terwijl de electrolyse slechts *twee* dagen was aangehouden (dag en nacht), en gebruik werd gemaakt (als het geval was bij de Bereidingen N°. 26 en volgende) niet alleen van een filtrum met *koolzuur zilver*, maar ook van een tweede filtrum met *zwavelzuur zilver*. Na verhitten met water, en verdampen van het water in een vacuum-exsiccator bleef terug 1.0605 gr. dus een verschil aanbiedende van 0,0533 gr. of 4.78 proc..

Analytische uitkomsten (zie vroeger pag. 12—17). Men wilde de gevonden waarden gezamentlijk opgeven (zie in deze Verhandeling, vroeger), ten einde een overzicht te hebben, ook ter betere vergelijking met uitkomsten vroeger ¹⁾ medegedeeld; zij zijn de volgende, betrekking hebbende op de Bereidingen:

	N°. 22	N°. 23	N°. 25	N°. 27	N°. 28	N°. 30
„Gemakkelijk vrijkomende zuurstof” van						
y ($SO_4 \cdot 2 O. Ag_2$)	4.66	4.5	4.84	4.77	4.65	4.78
zilverbioxyde	—	—	64.07	—	—	—
zwavelzuur zilver	—	—	31.09	—	—	—
	100.					

De theorie vereischt voor de formule $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$:

gemakkelijk vrijkomende zuurstof	4.90
zilverbioxyde	63.26
zwavelzuur zilver	31.84
	100.

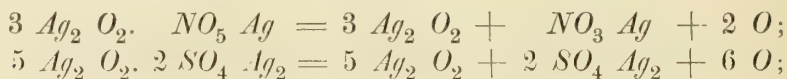
Al deze analyses zijn van producten gemaakt met een verzadigde oplossing. In Bereiding N°. 27 en 28 was daarenboven een *tweede* filtrum genomen, bevattende *zwavelzuur zilver*, met het doel, om de oplossing te houden in een toestand van genoegzame verzadiging. De Bereidingen N°. 19, N°. 20 en N°. 21 hadden tot andere

¹⁾ Zie de vorige Verhandeling: Verhand. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie) Dl. VI, N°. 5, p. 43 (1898).

Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1^e Sectie). Dl. VII.

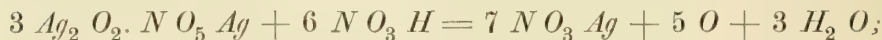
doeleinden verstrekt (zie vroeger en later). Van Bereiding N°. 24 werd geen melding gemaakt, daar de duur der proef zonder twijfel te lang was (namelijk ongeveer drie etmalen), en bij gevolg de concentratie te veel was gewijzigd (er werd toen namelijk nog geen gebruik gemaakt van een filtrum met zwavelzuur zilver tijdens de electrolyse). En wat betreft Bereiding N°. 26, daarvan werd de opbrengst geacht niet voldoende te zijn voor een behoorlijke analyse.

Over eenige eigenschappen van peroxy-zwavelzuur zilver. Er is groote overeenkomst tusschen peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver, zooals men reeds deed opmerken in de vorige Verhandeling. Deze overeenkomst vertoont zich bij vele eigenschappen, en met betrekking tot de aan te nemen structuurformule. In de eerste plaats is de kleur zoo ongeveer dezelfde, alhoewel die van het peroxy-zwavelzuur zilver minder donker is, en veeleer doet denken aan die van graphiet. Dan treedt ook peroxy-zwavelzuur op in den vorm meer of min van naalden, opgebouwd uit meer microscopische kristallen (die zich voordoen naar 't schijnt als zijnde octaëders). De kristallijne massa bezit evenzoo glans, alhoewel in mindere mate dan het geval is met peroxy-salpeterzuur zilver, met zijn veel schooner gevormde kristallen. De scheikundige eigenschappen bieden evenzoo de grootste overeenkomst aan, b.v. in de eerste plaats de reacties, die zich voordoen bij verhitten met water ¹⁾, in de volgende vergelijkingen voor beide stoffen voorgesteld.

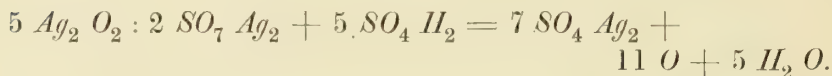


zie vroeger betreffende de structuurformule van het oxy-zwavelzuur.

Verdund salpeterzuur en zwavelzuur doen de volgende reacties plaats vinden: ¹⁾



en deze:



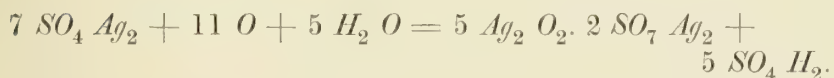
¹⁾ Zie Verhand. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam. (Eerste Sectie). Deel III. N°. 8, pag. 37.

De twee peroxy-zilverzouten (namelijk $3 Ag_2 O_2 \cdot NO_5 Ag$ en $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$) zijn oplosbaar in salpeterzuur en zwavelzuur met *bruine* kleur (evenals dit het geval is met zilverbioxyde $Ag_2 O_2$), welke oplossingen vooral sneller ontleed worden in bijzijn van water. Deze verkleuring doet zich niet voor met *rood* rookend salpeterzuur (het stikstof-peroxyde $N_2 O_4$ wordt hierbij zeker geoxydeerd; het zilverbioxyde verhoudt zich evenzoo tegenover dit salpeterzuur).

Over de vorming van peroxy-zwavelzuur zilver: $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$. De ontleding heeft in tegengestelden zin plaats van de vorming, bijgevolg aldus terug te geven:



en



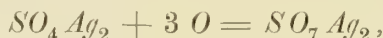
Wat zou kunnen opvallen in deze vergelijkingen, is wel dit, dat ter vorming van de zwarte verbindingen berekend op één molecuul, *zeven* (zegge 7) moleculen vereischt worden van het zilverzout (hetzij van salpeterzuur of van zwavelzuur zilver).

In bijzijn van deze hoeveelheden zuur (zie de twee vergelijkingen) kunnen de verbindingen, waarvan sprake is, bestaan, namelijk onder de omstandigheden, die bij de electrolyse voorkomen (wat betreft concentratie; hoeveelheid van de zwarte stof in de eenheid van tijd gevormd; elektrischen stroom; temperatuur, enz.). Maar de hoeveelheid aan vrij zuur hoopt zich bij voortduring op (tenzij deze meerendeels wordt geëlimineerd door neutraliseeren, b. v. door middel van koolzuur zilver), en na eenigen tijd is de *limiet* bereikt, en begint de reactie in *tegengestelden zin* (in welk geval de ontleding van het product het wint op de vorming er van). Deze limiet vertoont zich eerder bij electrolyse van zwavelzuur zilver, dan van salpeterzuur zilver, om de eenvoudige reden, dat de hoeveelheid aan zout in de eenheid van volumen ongeveer 100-maal *grooter* is bij salpeterzuur zilver, en nog meer.

Over de wijze van ontleding van peroxy-zwavelzuur zilver. Men zou kunnen aannemen, zooals dit geschiedde voor het peroxy-salpeterzuur zilver, dat de ontleding (ingeval eener *snelverlopende* ontleding bij wijze van ontploffing, en tevens bij een *langzame* zelf-

ontleding) een aanvang neemt met het oxy-zwavelzuur zilver ($SO_4 \cdot 3 O \cdot Ag_2$), zich voortplantende op het zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$). Dit laatste lichaam behoort in eigenlijken zin niet tot de onploffbare stoffen, tevens een betrekkelijk hooge ontledingstemperatuur bezittende (maar toch is het endothermisch). Trouwens dergelijke feiten zijn niet zeldzaam bij ontplofbare mengsels. In het geval, dat ons bezighoudt, is de zelfontledingstemperatuur van het product van electrolyse, met name van peroxy-zwavelzuur zilver, lager dan die van zilverbioxyde (zie de vorige Verhandeling ¹⁾), dat wel zal beteekenen, dat die van $SO_4 \cdot 3 O \cdot Ag_2$ betrekkelijk geringer is (meer of min tevens inhoudende, dat $SO_4 \cdot 3 O \cdot Ag_2$ rijker is aan potentiële energie dan $Ag_2 O_2$).

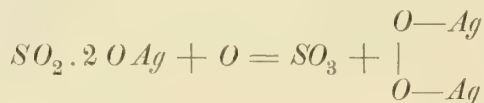
Over de vraag, of zilverbioxyde, of oxy-zwavelzuur zilver het eerst ontstaat. In den grond is de vraag, welke zich hier voordoet dezelfde, als het geval was met het peroxy-salpeterzuur zilver (zie de vierde Verhandeling). Nemen we eenvoudigheidshalve $SO_7 Ag_2$ in plaats van $S_2 O_{14} Ag_4 = (2 SO_7 Ag_2)$. Ook hier schijnt aanleiding te bestaan aan te nemen, dat in de eerste plaats oxy-zwavelzuur zilver wordt gevormd (door middel der electrolytische zuurstof):



welke verbinding dan kan worden geacht zuurstof af te staan, en wel 1 O:



welk atoom zuurstof zich zou werpen op het oorspronkelijke zout (zooals aanvankelijk het geval was met de electrolytische zuurstof):



(welke reactie wordt gevolgd door deze: $SO_3 + H_2 O = SO_4 H_2$). Evenzoo zou men het bestaan kunnen aannemen eener reeks van verbindingen, als bij de electrolyse van salpeterzuur zilver werd gedaan, van de type: $x Ag_2 O_2 \cdot y (SO_4 \cdot z O \cdot Ag_2)$. Maar liever zal daarop thans niet worden ingegaan, als behoorende tot het domein van bespiegeling.

¹⁾ Zie Verh. d. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam, (Eerste Sectie), Deel VI. N°. 5, pag. 3.

Over het oxy-zwavelzuur: $y(SO_4 \cdot z O \cdot H_2)$ in verband met het overzwavelzuur. Reeds was bekend sedert geruimen tijd, dat bij electrolyse eener waterige oplossing b. v. van zwavelzuur, de verhouding in maat van waterstof en zuurstof merkbaar kan afwijken van die uitgedrukt door 2 : 1. Berthelot ¹⁾ nu verrijkte de scheikunde met het gewichtige feit, dat zich vormt, als altijd onder bepaalde omstandigheden (zie daaromtrent de litteratuur opgave), van een bijzonder zuur, hetwelk tot nog toe onbekend was, en waaraan de naam is gegeven van *overzwavelzuur*; en ontstaande zoowel door eigentlijke electrolyse, als bij effluve van een mengsel van zwavelbioxyde en zuurstof. Bij het volgen van dezen laatsten weg, constateerde Berthelot de vorming van een anhydrid der formule $S_2 O_7$. In plaats van bij electrolyse te nemen water, zuur gemaakt met zwavelzuur (zie hierover iets later meer uitvoerig), ging Marshall ²⁾ uit van een waterige oplossing van het welbekende zout $SO_4 KH$, en slaagde er in, een kristallijn product af te zonderen, naar hem van de mol. formule $SO_4 K$, volgens analyses en andere gegevens hem verschaft door James Walker, deze laatste gegevens betrekking hebbende op het geleidingsvermogen voor electriciteit van een waterige oplossing van dit zout. Löwenherz ³⁾ stelde een formule voor, die het dubbele is van $SO_4 K$, dus $2 SO_4 K = S_2 O_8 K_2$, en wel steunende op gegevens met betrekking tot geleidbaarheid en daarenboven van cryoscopischen aard, van dit zout, namelijk van het overzwavelzuur kalium. Ook Bredig ⁴⁾ nam deze formule aan, door zich eveneens te baseeren op electrisch geleidingsvermogen; en zoo ook Guido Moeller ⁵⁾, die den cryoscopischen weg insloeg. Tevens voor het ammoniumzout, waaraan Marshall ⁶⁾ de formule $SO_4 \cdot NH_4$ gaf, werd door Guido Moeller aangenomen de formule $S_2 O_8 (NH_4)_2$, met 't oog op overeenkomstige gegevens.

Overzwavelzuur kalium $S_2 O_8 K_2$ zou beschouwd kunnen worden als te zijn: $S_2 O_8 K_2 = SO_3 \cdot SO_5 K_2$ (men heeft: $2 SO_4 KH = SO_4 H_2 + SO_4 K_2$). En het anhydride $S_2 O_7$, zijnde $S_2 O_7 = SO_3 \cdot SO_4$, zou kunnen beschouwd worden als te wezen een gemengd anhydride (zie vroeger $NO_6 = \frac{1}{2} (N_2 O_5 \cdot N_2 O_7)$).

¹⁾ Ann. Ch. Chim. et de Phys., Sér. V, T. 14, p. 345, 354, 363 (1878); l. c. T. 21, p. 181, 190 enz. (1880).

²⁾ Journ. of the Chem. Soc. 1891, p. 761, 771.

³⁾ Z. f. Phys. Chem I, S. 85.

⁴⁾ Z. f. Phys. Chem. XII. S. 230.

⁵⁾ Z. f. Phys. Chem. XII. S. 555.

⁶⁾ l. c.

Overzwavelzuur tegenover geoxydeerd water. Naar Berthelot ontstaat een verbinding tusschen overzwavelzuur en geoxydeerd water ($H_2 O_2$) of een lichaam daarvan afgeleid. Neemt men in aanmerking, dat het overzwavelzuur waarschijnlijk in verband staat met het oxy-zwavelzuur (zie vroeger), dan is dit een punt ter behandeling waardig, zooals dan ook later zal geschieden. Berthelot ging bij electrolyse uit van zwavelzuur verdund met water (in een bepaalde verhouding), en dit werd aan electrolyse onderworpen onder *afkoeling* (zie de oorspronkelijke Verhandeling over nadere bijzonderheden). Onder zekere omstandigheden (vooral betrekking hebbende op concentratie) is het alleen de *gemakkelijk* vrijkomende zuurstofoxy (namelijk de zuurstof, die meer bedraagt dan de hoeveelheid daarvan in zwavelzuur aanwezig), welke *niet* reageert op kaliumpermanganaat. Maar onder andere omstandigheden werkende, namelijk van *concentratie* (in den zin van een sterkere oplossing), kunnen *twee* vormen van „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” worden onderscheiden, namelijk de bovenvermelde vorm, en dan de vorm, die integendeel wel reageert op kaliumpermanganaat (verondersteld van in oplossing te verkeerren, met vrij zwavelzuur). Deze laatste zuurstof zou afkomstig zijn van *geoxydeerd water* ($H_2 O_2$), hetzij op een meer directe of indirecte manier, en de eerste vorm van zuurstof (niet reageerende op kaliumpermanganaat) zou afstammen van *overzwavelzuur*. Verondersteld, dat de samenstelling van het anhydride van overzwavelzuur bekend is (afgeleid van de formule, deze laatste afgeleid zijnde van de samenstelling van het zuur, terwijl deze op hare beurt steunt op analytische gegevens betreffende zouten), dan kan worden berekend door de hoeveelheid zuurstof (gemakkelijk vrijkomende) gevonden in dezen laatsten vorm, de hoeveelheid gevormd overzwavelzuur, zij dit genomen als anhydride (en der formule $S_2 O_7$). De hoeveelheid van den anderen vorm van zuurstof (gemakkelijk vrijkomende) geeft aan, de hoeveelheid geoxydeerd water ($H_2 O_2$), waarmede het overzwavelzuur zou kunnen geacht worden te zijn verbonden, zij dit genomen onder den vorm van anhydride, op een directe of indirecte wijze. Naar Berthelot ¹⁾ laat zich in de eerste plaats bepalen de *totale gew. hoev. gemakkelijk vrijkomende zuurstof*, van een deel der oplossing na electrolyse, waaraan dan aanvankelijk is toegevoegd *iodkalium*, en later van een oplossing van *zwavelbioxyde* (stijfsel behoeft niet te worden

¹⁾ l. c. Am. Ch. et de Phys. Sér. v. T. 21, pag. 182, 184, 190, enz..

²⁾ l. c. p. 184—187.

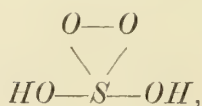
toegevoegd, daar de kleur van jodium toereikende is); en in een andere hoeveelheid der oplossing, bepaalt men de (gemakkelijk vrijkomende) zuurstof van het geoxydeerde water $H_2 O_2$) met *kaliumpermanganaat* (in zure oplossing). Het verschil dezer twee bepalingen doet de (gemakkelijk vrijkomende) zuurstof kennen van het overzwavelzuur. Berthelot ¹⁾ laat zich aldus uit, in de gevolgtrekkingen zijner proeven: „zoo gaat de vorming van geoxydeerd water door een maximum, wat de hoeveelheid betreft, die schijnt te beantwoorden aan een bepaalde verbinding van *overzwavelzuur* en *geoxydeerd water*: $S_2 O_7. 2 HO_2$ (oude vorm), die analoog is met de verbinding van baryumbioxyde en geoxydeerd water: $Ba O_2. HO_2$ (oude vorm), ontdekt door Schöne; tenzij, dat men er de voorkeur aan geeft, om het te beschouwen in *geconcentreerde* oplossingen (als het gehalte van water een zekere grens is overschreden, dan ontstaat alleen overzwavelzuur) als uitmakende een speciaal zuur:

$S_2 O_9. 2 OH (= S_2 O_7. 2 HO_2$, oude vorm), meer zuurstof bevattende dan het geval is met overzwavelzuur. De formule $S_2 O_9. 2 OH$ wordt in den thans in gebruik zijnde vorm: $S_2 O_9. 2 OH_2 = S_2 O_{11} H_4$, zij dit: $S_2 O_7. 4 OH$. Maar zooals Berthelot opmerkt (zie boven), kan men dit lichaam beschouwen als een verbinding van *overzwavelzuur* en *geoxydeerd water*: $S_2 O_7. 2 HO_2$ (oude vorm), zijnde $S_2 O_7. 2 HO_2$ in den gebruikelijken vorm: $S_2 O_7. 2 H_2 O_2$ (nieuwe vorm). En in plaats van het anhydride $S_2 O_7$, nemende het zuur $S_2 O_8 H_2 (= S_2 O_7 + H_2 O$ nieuwe vorm), zou men in dit geval hebben de formule $S_2 O_8 H_2. 2 H_2 O_2$, uit den aard te beschouwen als een *moleculaire* verbinding. Deze is in hoofdzaak zeer wel te vergelijken met de moleculaire verbinding van *oxy-zwavelzuur zilver* met *zilverbioxyde*, zij deze: $5 Ag_2 O_2. 2 SO_7 Ag_2$. Neemt men in de plaats van zilver (*Ag*) waterstof (*H*), dan wordt het geheel $S_2 O_{24} H_{14}$ voor de verbinding, waarvan sprake is; en boven werd gevonden $S_2 O_{11} H_4$, dat derhalve een verschil geeft van 13 *O* en 10 *H*, op het molecul. Neemt men slechts oxy-zwavelzuur zilver, dan heeft men $S_2 O_{14} H_4$ tegen $S_2 O_{11} H_4$, dus een verschil van 3 *O*, dat heel wat meer toenadering vertoont.

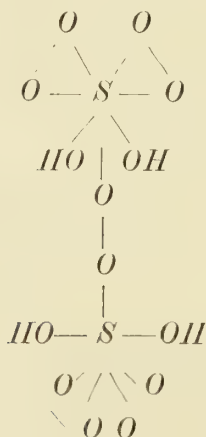
Over een andere structuurformule voor oxy-zwavelzuur (zie de voorgaande Verhandeling). Eenvoudigheidshalve zal voor zwavelzuur

¹⁾ 1. c. p. 190.

worden genomen een symmetrische formule, en wel deze:

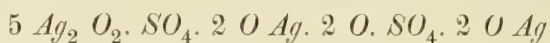


en dan zou voor oxy-zwavelzuur kunnen geschreven worden:

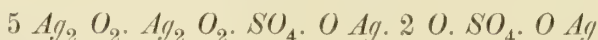


Maar in plaats van

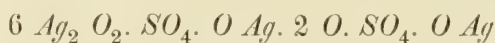
te schrijven: $5 \text{ Ag}_2 \text{ O}_2 \cdot 2 (\text{SO}_4 \cdot 3 \text{ O} \cdot \text{Ag}_2)$, zou kunnen worden genomen; $5 \text{ Ag}_2 \text{ O}_2 \cdot \text{SO}_6 \text{ Ag}_2 \cdot 2 \text{ O} \cdot \text{SO}_6 \text{ Ag}_2$, of dat hetzelfde is:



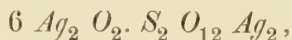
of ook:



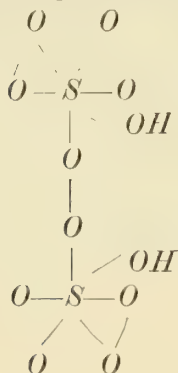
en daarenboven:



of

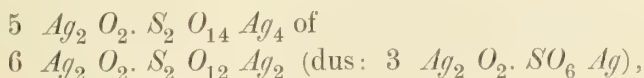


en bij gevolg zou dan oxy-zwavelzuur zijn: $\text{S}_2 \text{ O}_{12} \text{ H}_2 = \text{SO}_4 \cdot \text{OH} \cdot 2 \text{ O} \cdot \text{SO}_4 \cdot \text{OH}$ (zie overzwavelzuur: $\text{S}_2 \text{ O}_8 \text{ H}_2$), nader ontwikkeld:

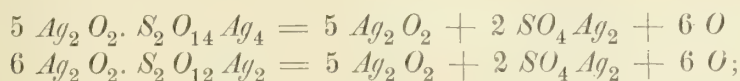


Maar verondersteld, dat aan het molecuul een zoodanige structuur-formule werd toegekend, dan zou de hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” desnietteenstaande dezelfde blijven (namelijk de zuurstof, die vrij komt bij verhitten der zwarte stof met water).

Want uitgaande van deze twee formules voor het peroxy-zwavelzuur zilver ($S_2 O_{24} Ag_{14}$):



zou men hebben voor de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (bij verhitten met water):



de verhouding tusschen „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” en zilverbioxyde is namelijk gegeven door de proef. De laatste formule zou dus een reactie veronderstellen van hypothetischen aard; en wel niet te aanvaarden door gebrek aan argumenten. Ook zou de tweede formule moeten doen veronderstellen, een uiteenvallen der kristallen tot fijne stof, ten minste als zijnde tamelijk waar-schijnlijk (en wel bij het vrijkomen dezer zuurstof), dat zich niet voordoet. Het bestaan van een zuur der formule $S_2 O_{12} H_2$ (over-zwavelzuur is $S_2 O_8 H_2$) is problematisch.

Over zilverbioxyde, peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver als oxydatie-middelen, en over de afscheiding der zuren van oxy-salpeterzuur zilver of van oxy-zwavelzuur zilver. Al deze peroxyden zijn zeer krachtige oxydatie-middelen, hetzij door den rest „zilverbioxyde”, hetzij door den rest „oxy-salpeterzuur of oxy-zwavelzuur zilver”. Zilverbioxyde als zoodanig is een vrij sterk oxy-datiemiddel, maar oxy-salpeterzuur zilver en oxy-zwavelzuur zilver (niet te verwarren met peroxy-salpeterzuur en peroxy-zwavelzuur zilver), overtreffen in dit opzicht blijkbaar het bioxyde, daar zij minder stabiel zijn van natuur. Dit aangenomen zijnde, zal een oplossing van peroxy-salpeterzuur en peroxy-zwavelzuur zilver in salpeterzuur en zwavelzuur, een betrekkelijk sterker oxydatie-middel zijn (hierbij wordt verondersteld, dat het salpeterzuur vrij is van stikstof-peroxyde). Ook zouden oplossingen van zilverbioxyde in zwavelzuur of salpeterzuur voordeelen kunnen aanbieden als oxy-datie-middelen.

Het zou van belang kunnen zijn, om deze voorlaatste oplossingen te onderwerpen aan dialyse (b. v. in een poreus vat) bij gewone temperatuur of onder afkoeling, aangezien oxy-salpeterzuur en oxy-zwavelzuur zich wel in vrijen staat in oplossing zullen bevinden.

De volgende Tabellen bevatten eenige gegevens, betrekking hebbende op de snelheid der spontane ontleding van peroxy-zwavelzuur zilver. De letters geven hetzelfde aan als dit het geval is in de vorige Verhandelingen ¹⁾.

Peroxy-zwavelzuur zilver.

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N ^o 20.	half verzadigd.	14—18 Juni 1898.	20 Juni.	1.2791 gr.	—	—	—
			21 " "	—	—0.0002 gr.	—	—
			22 " "	—	0	—	—
			22 " "	1.2098 " in buisje.	—	—	—
			22 Sept.	1.1996 gr.	—	0.0102 gr.	0.00065 gr.
			22 Dec.	1.1965 " "	—	0.0031 " "	0.00019 " "
			22 Maart 1899.	1.1957 " "	—	—0.0008 " "	—0.00005 " "
N ^o 21.	half verzadigd.	1—4 Juli 1898.	6 Juli.	1.2983 gr.	—	—	—
			7 " "	—	0.0002 gr.	—	—
			8 " "	—	0	—	—
			8 " "	1.2674 " in buisje.	—	—	—
			8 Oct.	1.256 gr.	—	0.0114 gr.	0.00069 gr.
			9 Jan. 1899.	1.2548 " "	—	0.0012 " "	0.00007 " "
			10 April.	1.2537 " "	—	0.0011 " "	0.00006 " "

Eenige opmerkingen met betrekking tot Bereiding N^o. 20 en N^o. 21. Dezelfde weg werd gevolgd (zie Bereiding N^o. 17, N^o. 18 en N^o. 19). Bij Bereiding N^o. 20 was de beweging der schroef minder snel en bij Bereiding N^o. 21 minder regelmatig, reden waarom de toestel uit elkander werd genomen, en de cylinder beter loodrecht op het uurwerk werd geplaatst (zie Bereiding N^o. 22 pag. 12).

Besluit betreffende de snelheid van zelfontleding. Deze is zoo ongeveer, naar gemelde opgaven, achttmaal grooter dan zij bedraagt voor oxy-salpeterzuur zilver ²⁾ (voor eenzelfde temperatuur):

Contrôle der quantitatieve bepaling van salpeterzuur zilver. Meermalen werd gebruik gemaakt van alcohol (abs.) als middel ter scheiding van salpeterzuur zilver en zwavelzuur zilver. Ter contrôle nu werd uitgegaan van een bepaalde hoeveelheid salpeterzuur

¹⁾ Zie Verhand. d. K. Akad. v. W. te Amsterdam (Eerste Serie) Deel VI, N^o. 1, pag. 31.

²⁾ Zie de Verhandelingen vroeger, en deze Verhand. later.

zilver, dit opgelost in abs. alcohol bij gewone temperatuur, de oplossing geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur), en gewogen. Er werd uitgegaan van salpeterzuur zilver uit den handel, aanvankelijk fijn gemaakt, en daarna onder een exsiccator geplaatst, zij dit 0.3014 gr.; na geplaatst te zijn geweest in het luchtwaterbad bij ongeveer 95° , bleef het gewicht onveranderd. Vervolgens behandeld met abs. alcohol, op de wijze boven medegedeeld (alleen met dit verschil, dat het zout eenige malen achtereenvolgens met alcohol werd behandeld en de opeenvolgende oplossingen in een en hetzelfde schaalje werden gedaan), bleef er terug 0.3015 gr..

Men verwarre niet het zooeven medegedeelde met hetgeen vroeger ¹⁾ werd opgemerkt met betrekking tot het gebruik van alcohol (abs.) als middel ter scheiding; want toen was aanwezig zilveroxyde ($Ag_2 O$), en als gevolg daarvan is alcohol te ontgaan.

De vorming van een zilverzout van een oxy-zuur, in verbinding met zilverbioxyde, beschouwd uit een meer algemeen oogpunt. Volgens de gegevens, waarover thans kan worden beschikt, is het waarschijnlijk, dat vele zilverzouten (die genoegzaam oplosbaar zijn in water, en waarvan het zuur verzadigd is met zuurstof) aanleiding zullen geven (onder gewone omstandigheden van *electrolytische oxydatie*) tot de vorming van een *zilverzout* van een *oxy-zuur* met *zilverbioxyde* (langs *electrolytischen weg*), bij 't volgen van den weg vroeger ingeslagen; met inachtname van zekere wijzigingen aangebracht in de hoofdagencia (concentratie, electrischen stroom, enz.). Men ziet dadelijk in, dat deze reactie, uit een meer algemeen oogpunt beschouwd, aanleiding zou kunnen geven tot een menigte overeenkomstige verbindingen, hetzij van *anorganische* natuur of *organische*, zoogenaamd. Als dit werkelijk aldus is, zou deze reactie b.v. van veel waarde kunnen zijn met 't oog op de classieke proef van Kolbe (met betrekking tot de electrolyse van een waterige oplossing van een zout met een organisch zuur, b.v. van een kaliumzout van azijnzuur), en men heeft een aanvang gemaakt met de electrolyse van *azijnzuur zilver*, met de bedoeling, de reeks van proeven uit te strekken tot zilverzouten van andere organische zuren, dus ook van aromatische zuren. Tevens heeft men op 't oog verbindingen, hetzij anorganische of organische dusgenaamd, met verschillende resten als CO , NO_2 , SO_2 (b.v. als $SO_2. OH$) enz., welke resten waarschijnlijk *electrolytische zuurstof*

¹⁾ Verhand. d. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie) Dl. V. N^o. 1, p. 29.

kunnen vastleggen, en dientengevolge aanleiding geven tot een verbazende ophooping van zuurstof, wanneer meerdere van denzelfden rest of verschillende resten aanwezig zijn, terwijl deze worden omgezet in NO_4 , SO_4 , enz. (men steunt hier op de structuurformules gegeven voor peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver). Zooals de zaken thans staan, wordt aangenomen, dat het zilverbioxyde $Ag_2 O_2$ de waarschijnlijke aanleiding is tot het doen ontstaan eener meer *stabiele* verbinding van dit oxyde met oxy-zuren als zilverzouten (en wellicht ook van andere zouten), terwijl de zilverzouten dezer oxy-zuren wellicht in vrijen staat niet kunnen bestaan.

Men zou dergelijke onderzoeken ook kunnen doen met overeenkomstige zouten van andere metalen, b.v. van natrium (waarschijnlijk isomorph met zilver), tenzij de oplosbare toestand van het product der electrolyse te veel bezwaar veroorzaakt. Maar alvorens uitkomsten te vermelden van proeven in deze richting genomen (en wel in de eerste plaats betreffende de electrolyse van azijnzuur zilver), wilde men nog eenige bijzonderheden geven aangaande *peroxy-salpeterzuur zilver*.

Zelfontleding van peroxy-salpeterzuur zilver (vervolg). Het volgende heeft betrekking op Bereiding N°. 25, en is een vervolg op gegevens van vroeger. Na reeds *een jaar* te hebben gestaan, werd opnieuw gewogen, dus na een *tweede jaar*, en vervolgens na *een derde jaar*, en dat onder ongeveer dezelfde omstandigheden, de uitkomsten waarvan in de volgende Tabel zijn opgenomen (zijnde een vervolg van de Tabel in de voorgaande Verhandeling ¹⁾ voorkomende):

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N° 25.	200 gr.	25 Nov. 1895	—	—	—	—	—
			28 Nov. 1895	5.7658 gr.	—	—	—
			15 Dec. 1896	5.7492 "	—	— 0.0166 gr.	— 0.000052 gr.
			16 Dec. 1897	5.7348 "	—	— 0.0144 "	— 0.000047 "
			16 Dec. 1898	5.7158 "	—	— 0.019 "	— 0.000063 "

De ontledingssnelheid zou bijgevolg aanvankelijk kleiner worden, om daarna wat grooter te zijn (zie onder *j* de twee laatste waarden); alles

¹⁾ Zie Verhand. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie). Deel VI. N°. 1, p. 31 (1897).

berekend zijnde op 1 gr. der stof en per week. Veronderstellende, dat 2 O worden geëlimineerd van den rest $N O_5 Ag$ (deel uitmakende van het molecuul $3 Ag_2 O_2. N O_3. 2 O. Ag = N Ag_7 O_{11}$), maakt dit voor 1 gr. stof 0.03384 gr. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van den rest $N O_5 Ag$). Aangezien nu in den tijd van *drie* jaren ongeveer, op een hoeveelheid van 5.7658 gr. stof is geëlimineerd 0.05 gr. zuurstof, geeft dit voor 1 gr. stof aan zuurstof 0.0086 gr.. Derhalve zouden ongeveer 12 jaar worden vereischt tot het elimineeren dezer 2 O uit het molecuul (vroeger was gevonden 13 jaren, uitgaande overigens alleen van de eerste gegevens), verondersteld altijd, dat de gemiddelde snelheid niet verandert, hetgeen evenwel alzoo niet zal zijn.

Opbrengst van peroxy-salpetersuur zilver als funtie van den tijd.

Er werd uitgegaan van een oplossing ter sterkte van 200 gr. zilvernitraat in één liter; overigens werd *niet* geneutraliseerd (de electrolyse van zilvernitraat vereischt dit niet). De volgende Tabel zal wel geen nadere verklaring behoeven:

Nummer der Bereiding.	Tijd.	Opbrengst.
N°. 22	3 uur	5.69 gr. ongeveer (er gaat
24	3	5.98 altijd wat ver-
25	3	5.78 loren).
26	3	6.01
27	2	4.26
28	4	9.03
29	5	9.88.

Electrolyse eener waterige oplossing van azijnzuur zilver. Nieuwe reeks van proeven.

Een der factoren, die den grootsten invloed uitoefenen, is de oplosbaarheid van het lichaam, waarvan sprake is, in geval van electrolyse. Het *azijnzuur zilver* nu is bij gewone temperatuur betrekkelijk weinig oplosbaar, en wel ongeveer in gewicht 1 p. c. (aangegeven in volumen der oplossing). Ter contrôle hiervan, werd een hoeveelheid van 10 c. c. eener verzadigde oplossing van azijnzuur zilver (bij de temperatuur der omgeving) geplaatst in een vacuum-exsiccator; er bleef terug 0.1028 gr., dus is de oplosbaarheid ongeveer die van 10 gr. *azijnzuur zilver* in 1000 c. c.

of in één liter der oplossing ¹⁾. De oplosbaarheid van azijnzuur zilver overtreft trouwens die van *zwavelzuur zilver* (zie de vorige Verhandeling); maar daaruit trekke men nog niet het besluit, dat de electrolyse gemakkelijker zal gaan in den vroeger aangeduiden zin, want behalve de oplosbaarheid zijn er nog andere invloeden, die een rol te vervullen hebben in de electrolytische reactie, en die men hier op 't oog heeft (zie vooral later).

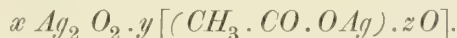
Bij wijze van een voorloopige proef werd uitgegaan van een verzadigde oplossing van *azijnzuur zilver*, en de oplossing *niet* geneutraliseerd gedurende de electrolyse, die men twee uur aanhield achtereenvolgens. Er had zich op de anode (zijnde een betrekkelijk dunne platinadraad) hier en daar een zeer dunne laag afgezet van een zwarte stof. Men vond het wel aantrekkelijk, om met zulk een geringe hoeveelheid te werken, maar het kwam niet dadelijk op in de gedachte, draad met afzetsel te wegen. De draad werd, na te zijn gewasschen, in een (gewone) reageerbuis gedaan, water bijgevoegd en verhit. Niettegenstaande de hoeveelheid zeer gering was, vertoonden zich kleine gasbellen en dat wel vrij duidelijk. De platinadraad behield overigens de zwarte kleur, en deze boven een reageerbuisje houdende, terwijl men er eenige druppels salpeterzuur langs liet vloeien, kon worden waargenomen, dat zich vormde een *bruine* oplossing. Dat alles laat zich verklaren in twee woorden, om het zoo uit te drukken, de *bruine* kleur is namelijk afkomstig van *silverbioxyde*, dat terugblijft na behandeling met water onder verhitten, terwijl daarbij van een gas vrijkomt (zoogoed als zeker zuurstof), afkomstig van het *oxy-azijnzuur zilver*, en het azijnzuur zilver wordt opgelost; evenwel is dit alles nog te bewijzen.

Eerste Bereiding. Aldus zal worden aangegeven de eerste proef, die meer of min quantitatief werd vervolgd. Bij de electrolyse werd de oplossing geneutraliseerd (dag en nacht). De platinadraad was vooraf gewogen, en opnieuw gewogen na *electrolyse*, met de zwarte stof afgezet op dezen draad (deze laatste was aanvankelijk gewasschen met water, en daarna geplaatst onder een vacuum-exsiccator), in gewicht slechts bedragende 0.0035 gr. Draad met afzetsel werd gebracht in een (gewone) reageerbuis, daarna als gewoonlijk geplaatst onder een vacuum-exsiccator, en andermaal gewogen, waarbij het gewicht bleek hetzelfde te zijn, dus 0.0035 gr. Met deze zeer geringe hoeveelheid werd gewerkt, ten einde

¹⁾ Zie Dict. Wurtz, Supplém. II, p. 11.

de omstandigheden te leeren kennen, waaronder het lichaam, waarover wordt gehandeld, zich ontleedt, en zoo mogelijk nog andere eigenschappen. Er werd eenig water aan toegevoegd, en op een waterbad verhit. De ontleding, te weten de gasontwikkeling (zoo goed als zeker zuurstof) ving reeds aan bij 26° , maar in meerdere mate bij 37° — 42° . Er werd vervolgens verhit bij 60° — 70° en daarna bij 70° — 80° , voorzichtigheidshalve (zie vroeger de proeven met het product der electrolyse van zwavelzuur zilver). Het geheel werd toen geplaatst onder een vacuum-exsiccator, en het gewicht herleid tot 0.0034 gr.. Men meende overigens met de loupe eenige kristalletjes (van azijnzuur zilver) te kunnen onderscheiden.

Eenige voorloopige theoretische beschouwingen. Algemeene formule. Zelfs op dit oogenblik, met de weinige gegevens waarover kan worden beschikt, schijnt er geen aanleiding te zijn, om er aan te twifelen, dat het product van electrolyse, waarvan sprake is, meer dan waarschijnlijk een structuur bezit overeenkomstig met die van het product van electrolyse van zilvernitraat en zilversulfaat ($3 Ag_2 O_2 \cdot NO_5 Ag$ en $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$), en bij gevolg zal hebben tot formule:



De waarden van x , y en z zijn noodwendig nog te bepalen, dat overigens lang niet gemakkelijk zal wezen, en betrekkelijk veel zwaarder dan het overeenkomstige op te lossen vraagstuk aangaande het peroxy-zwavelzuur zilver, als product der electrolyse van zwavelzuur zilver.

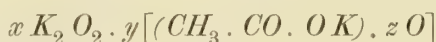
Betrekking, aan te nemen tusschen de vorming van peroxy-azijnzuur zilver en de welbekende reactie van Kolbe ¹⁾ We loopen een weinig vooruit, met reeds een naam toe te kennen aan dit electrolytische lichaam, waarvan de studie nauwelijks is aangevangen, maar dit is niet wel te ontgaan, en de verbinding is genoemd *peroxy-azijnzuur zilver*. Er wordt dus verondersteld, dat men heeft te doen met een verbinding van $Ag_2 O_2$ en $CH_3 \cdot CO \cdot OAg \cdot z O$, zooals reeds boven gezegd is. Zal men langzamerhand de opbrengst van een Bereiding kunnen doen vermeerderen, dan is het volstrekt noodig, om meer of min te dringen in het mechanisme der reactie, want langs

¹⁾ Zie b.v. Handb. Org. Chem. v. Beilst. Bd. I, S. 399 (1893); en tevens: J. Ch. Soc. Vol. 72 en 74, p. 352 (1898).

een zuiver empirischen weg is dit zeer bezwaarlijk te bereiken. Nu kan naar Kolbe, de electrolytische zuurstof, onder zekere omstandigheden, zich werpen op het zout van *azijnzuur* en de volgende reactie te voorschijn roepen:



het vrije zuur nemende in plaats van het zout, waarvoor Kolbe in zijn classieke reactie nam een waterige oplossing van *kaliumacetaat*; overigens slechts te beschouwen als een voorbeeld van geheel een categorie van reacties, die meer of min overeenkomst aanbieden (tevens het geval met zouten van tweebasische koolstofhoudende zuren, enz.). Men vraagt zich af, welk is het verschil tusschen de reactie van Kolbe en diegene, welke ons hier bezig houdt. De reden hiervan zal niet zijn gelegen in het verschil in metaal, te weten zilver in plaats van kalium (of natrium, enz.), maar zal wel deze zijn, dat het oxy-azijnzuur zilver zich kan *verbinden* met het zilverbioxyde $Ag_2 O_2$, zoodat de gemakkelijk vrijkomende zuurstof verbonden kan blijven. Zonder dit zilverbioxyde, aldus kan men tenminste voor 't oogenblik aannemen, zou deze zuurstof zich evenzoo werpen op het zout, om het te ontleden in den zin als boven is aangegeven voor het zuur, dat in hoofdzaak op hetzelfde neêrkomt met betrekking tot het zout. Maar dit neemt niet weg, dat bij electrolyse van kaliumacetaat ontstaan kan van een verbinding: ¹⁾



of alleen $CH_3 \cdot CO \cdot OK \cdot z O$, maar ontleed wordende onder de bestaande omstandigheden, en zuurstof gevende (afkomstig verondersteld van $CH_3 \cdot CO \cdot OK \cdot z O$), zich werpende op het kaliumacetaat, zoodat er wordt gevormd:

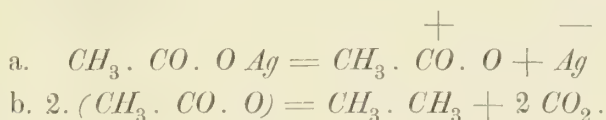


De reactie van Kolbe (zie de volgende Verhandeling) schijnt te moeten beschouwd worden als een parallele of secondaire reactie.

Maar, vraagt men, waarom is de opbrengst zoo beperkt. Dit is een punt voor nader onderzoek. In ieder geval volgt er uit met eenige waarschijnlijkheid, dat de mate van zuur zijn der oplossing veel meer is beperkt, dan het geval is voor de oplossing

¹⁾ Zie over $K_2 O_2$ b. v. Dict. de Wurtz, art. potassium p. 1120.

bij electrolyse van zwavelzuur zilver (en deze *vorderde* reeds een neutraliseeren der oplossing gedurende de electrolyse, niet het geval met zilvernitraat). Hetgeen gezegd is, heeft betrekking op het systeem van evenwicht onder omstandigheden, waarin de electrolyse plaats heeft. Maar mogelijk is, en ook dit moet nog worden nagegaan, dat de grootste hoeveelheid electrolytische zuurstof wel voor een oneindig klein tijdstip, om zich zoo uit te drukken, aanvankelijk vormt *oxy*-azijnzuur zilver (als *primaire* reactie was vroeger aangenomen de vorming van *oxy*-salpeterzuur zilver en van *oxy*-zwavelzuur zilver; en zulks vóór het ontstaan van zilverbioxyde, $Ag_2 O_2$), maar dat dit lichaam wordt ontleed onder vorming van aethan $CH_3 \cdot CH_3$ en kooldioxyde CO_2 , benevens $Ag OH$ of liever $Ag_2 O$ (zie hierboven de vergelijking met *K*), hetwelk dan azijnzuur moet vinden ter omzetting in een zout. Terecht zou men echter de vraag kunnen stellen, waarvan dit zuur afkomstig is, en duidelijker wordt alles, als de volgende reactie als grondslag wordt aangenomen:



Alvorens evenwel deze quaesties te behandelen, wenschte men eerst wat meer ervaring op te doen met betrekking tot de electrolyse als zoodanig, en de opbrengst aan zwarte stof.

Tweede Bereiding. Deze had plaats onder dezelfde omstandigheden als de eerste Bereiding, alleen werd de electrolyse *twee* dagen aangehouden (dag en nacht), zonder echter een noemenswaardigen invloed uit te oefenen op de opbrengst, die zijnde van 0.0034 gr..

Over een verandering gebracht in de bereiding, betrekking hebbende op de wijze van neutraliseeren. Andermaal werd de vraag gesteld, welke toch wel de oorzaak zou kunnen zijn van zulk een vreemde uitkomst, en als eerste aanleiding daartoe aannemende, dat het neutraliseeren wellicht nog niet in voldoende mate geschiedt, zoo werd een wijziging in dezen zin aangebracht. Lettende op het beginsel der reactie, zou men kunnen beweren, dat de reactie moet kunnen geschieden in een oplossing die meer of min zuur is, als gevolg van een weinig vrij azijnzuur; de zwarte verbinding toch vormt zich, al is het dan ook in zeer geringe hoeveelheid,

onder de bekende gewone omstandigheden. De oplossing wordt wel gefiltreerd bij voortdurend door een filtrum met koolzuur zilver, maar dit vereischt *tijd*, en als gevolg daarvan moet dus altijd eenig vrij zuur in oplossing wezen, waarvan men zich trouwens kan overtuigen. Daarbij komt, en hier dient op gelet te worden, dat een voldoende neutralisatie zich waarschijnlijk *niet* voordoet met koolzuur zilver, namelijk bij gewone temperatuur, maar alleen bij verwarming. Bij gewone temperatuur schijnt namelijk een systeem te bestaan van evenwicht, bij aanwezigheid van koolzuur zilver, dat de aanwezigheid toelaat van een niet te veronachtzamen hoeveelheid aan *vrij azijnzuur*. Nu spreekt de reeds beperkte opbrengst betrekkelijk, voor een storenden invloed van de zijde van het *vrije zuur*, maar die als gevolg van *oxydatie* (zie boven) is door deze veronderstelling niet buiten gesloten. Deze laatste is in ieder geval geoorloofd, en derhalve is tevens geoorloofd, in die richting te werken. En uit het boven gezegde volgt, dat men gebruik heeft te maken van *gewoon zilveroxyde* $Ag_2 O$ in plaats van koolzuur zilver $CO_3 Ag_2$, want onder die omstandigheden verandert het systeem van evenwicht met betrekking tot *vrij azijnzuur* in een systeem van evenwicht, dat van zelf de aanwezigheid van een geringere hoeveelheid van vrij azijnzuur toelaat, aangezien er geen koolzuur is (dat evenzoo de rol vervult van een zuur, al is het dan ook in een minder sterke mate). Zelfs uitgaande van een *mengsel* van koolzuur zilver en zilveroxyde, maar voor het grootste gedeelte bestaande uit zilveroxyde ($Ag_2 O$), zal dit laatste verreweg de hoofdrol vervullen, en zal *vrij azijnzuur* slechts in geringe hoeveelheid optreden. De eigenschap van zilveroxyde ($Ag_2 O$), om een weinig *oplosbaar* te zijn in water, al is dit dan ook in zeer beperkte mate, maakt, dat vrij azijnzuur genoegzaam afwezig is, of men zou dit ten minste daarheen kunnen richten; en dit te meer, omdat dit oxyde een betrekkelijk sterke basis is, roodlakmoes blauw kleurende. Ook is deze basis sterk genoeg, om zich te kunnen verbinden met kooldioxyde (CO_2), dat meer of min een bevestiging insluit van hetgeen boven is gezegd, te weten, dat zilveroxyde ($Ag_2 O$) het systeem van evenwicht in dien zin zou kunnen doen veranderen, dat er geen *vrij azijnzuur* meer aanwezig is, of beter gezegd, zoo niet volkomen afwezig, ten minste bijkans geheel niet voorhanden. Men moet namelijk ook in aanmerking nemen, dat er (theoretisch gesproken) *dissociatie* plaats heeft in de oplossing van azijnzuur zilver, zoodat de oplossing te gelykertijd zeer weinig zuur en alkalisch zou kunnen zijn (ook in geval wordt verondersteld, dat zeer weinig zilveroxyde $Ag_2 O$ in overmaat aan-

wezig is). Tevens dient in 't oog te worden gehouden, dat er sprake zou kunnen zijn van een *geoxydeerd* worden van azijnzuur zilver (het zij, dat hiervan een deel wordt geoxydeerd, en dat de oxydatie slechts ten deele plaats heeft), en zulks *niet* in den zin reeds boven aangegeven (namelijk *niet* met vorming van $CH_3 \cdot CH_3$ en CO_2), maar in dier voege, dat er een zilverzout ontstaat van een *andere verbinding*, afgeleid van azijnzuur, en wel door oxydatie. Aan complicatie kan dus wel geen gebrek zijn, en daarop dient te worden gelet, en in de eerste plaats moet men de verschillende ontledingsproducten der stof *analyseeren*, waarvan sprake is, wil men geen wellicht valsche gevolgtrekkingen maken, door de verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen.

Bereiding van gewoon zilveroxyde ($Ag_2 O$). De wijze van bereiding scheen niet onverschillig te zijn. Het oxyde nu werd gemaakt door verhitten van koolzuur zilver ($C O_3 Ag_2$), ten einde het zoo zuiver mogelijk te hebben, namelijk vrij van eenige andere basis, en vooral vrij van eenig ander zuur dan dat van kooldioxyde, ten einde zooveel mogelijk complicatie te ontgaan. Kooldioxyde kan als koolzuur zilver zonder bezwaar aanwezig zijn, tenzij in overwegende hoeveelheid (overigens alleen door ondervinding te leeren kennen).

Voor de bereiding van zilveroxyde ($Ag_2 O$) werd gebruik gemaakt van denzelfden toestel ¹⁾ als vroeger aangewend bij de proeven over de ontledings-snelheid en wijze van ontleding van het zwarte product van electrolyse van salpeterzuur en van zwavelzuur zilver. Evenzoo werd verhit in een langzamen stroom van droge lucht; maar de verschillende buizen waren niet gevuld met calciumchloride enz., behalve de eerste V-buis, die zwavelzuur bevatte. Bij de eerste bereidingen werd gebruik gemaakt van *barytwater*, en dat wel, om het begin en tevens het einde der reactie te leeren kennen (het barytwater bevond zich in een klein V-buisje, op zijne beurt verbonden met een dusdanig buisje met water, om het kooldioxyde der lucht te weren). Later behoefde men geen gebruik meer te maken van barytwater, wijl toen de omstandigheden, waaronder moet worden gewerkt, genoegzaam bekend waren. De bereiding gaf aanleiding tot eenige opmerkingen betreffende de ontleding van koolzuur zilver. In de eerste plaats verdient vermelding, dat de dissociatie reeds begint bij een veel lagere temperatuur dan overeenkomt met hetgeen daaromtrent staat

¹⁾ Zie de voorgaande Verhandelingen in de Verhand. d. K. Akad. v. W.

opgeteekend, zijnde deze ongeveer 130° , en wellicht nog een weinig lager. Bij een der bereidingen liet men de temperatuur langzaam stijgen en wel tot ongeveer 200° , steunende op eenige gegevens in de litteratuur; en, toen de ontleding verre was van volkomen, zag men er geen bezwaar in, tot 210° te gaan als maximum (altijd, als gezegd, in een langzamen stroom van droge lucht). Men was niet weinig verbaasd, van ongeveer het derde gedeelte van het zilveroxyde ($Ag_2 O$) herleid te zien tot *silver*. Het is waar, de ontleding had vele dagen aangehouden, toch was zulk een uitkomst geheel onverwacht, vooral met het oog op het zilveroxyde ($Ag_2 O$), afgeleid van het bioxyde ($Ag_2 O_2$), in vroegere Verhandelingen medegedeeld. Het is duidelijk, dat voortaan de temperatuur zoo ongeveer werd gehouden op die van 180° — 190° , onder welke omstandigheden de ontleding, zij dit van ongeveer 10 gr. aan koolzuur zilver, vele dagen eischt; en dan nog bevat het product koolzuur zilver, en wel in noemenswaardige hoeveelheid.

Bereiding N^o. 3. Na deze uitwijking keert men terug tot het onderwerp, dat in de eerste plaats aan de orde is, te weten de bereiding der zwarte stof door electrolyse van azijnzuur zilver; voortaan met gebruik van *zilveroxyde* ($Ag_2 O$) in plaats van koolzuur zilver, zooals bij de vorige proeven het geval was (trouwens daaryan toch nog een deel uitmakende; zie de bereiding van zilveroxyde). Voordat de electrolyse werd aangevangen der oplossing van azijnzuur zilver, gaf deze een duidelijk alcalische reactie met roodlakmoespapier (daar de toestel reeds vele uren in werking was geweest vóór de electrolyse). En na electrolyse, vertoonde de oplossing te gelijkertijd een zwak zure en alcalische reactie, zoowel nabij de anode als bij de kathode. Het zwarte afzetsel, alhoewel dit bijzonder weinig was, werd gewasschen, zoomede de platina-draad met het daaraan hangende afzetsel, toen gedroogd, als naar gewoonte in een vacuum-exsiccator, en gewogen. De opbrengst was die van 0.0092 gr. (bij het wasschen was natuurlijk iets verloren gegaan), zoodat de verandering in de bereiding is te beschouwen als te zijn betrekkelijk een vooruitgang.

Verandering gebracht in de wijze van bereiding. Aangezien een gedeelte van de zwarte stof, afgezet, verloren gaat door gebrek aan

¹⁾ Zie b. v. Dict. de Wurtz, art. urgent p. 372, Supplém. I, 201, Supplém. II, 364.

contact met de anode (slechts dat gedeelte der zwarte stof, dat hetzij indirect hetzij direct met den platinadraad in contact is, fungeert als anode), als gevolg van een ontleed worden langzamerhand onder den invloed van *vrij zuur*, ontstaan door de electrolyse, trachtte men daarin verbetering te brengen. En wel aldus, dat, in contact met den platinadraad (zijnde de anode) werd geplaatst een klein *platinaplaatje*, om van de zwarte stof op te nemen, die door dit platina op directe wijze verbonden kan wezen met de anode. De opbrengst viel evenwel niet mede, daar deze was 0.0045 gr.. Bij gevolg moest men terugkeeren tot een platina-draad als zoodanig voor anode, maar b.v. deze wijziging aanbrengen, van de proef langer aan te houden dan *twee* dagen, zooals trouwens het geval was met Bereiding N°. 4, waarvan boven sprake is.

Bereiding N°. 5. De proef werd thans *drie* dagen voortgezet (namelijk als vroeger, dag en nacht). Tevens werd de hoeveelheid zilveroxyde (Ag_2O) langzamerhand meer, daar de nieuwe hoeveelheid toegevoegd, blijkbaar die te boven ging bij de vorige Bereiding ontleed. De opbrengst bedroeg thans 0.011 gr., namelijk de hoeveelheid, die zich bevond op het horlogeglas (na wasschen daarop gedaan); en overgebracht in een (gewoon) reageerbuisje (na vooraf te zijn gedroogd), was de hoeveelheid zwarte stof herleid tot 0.008 gr.. Bij 't wasschen gaat noodwendig ook wat verloren.

Over een verandering in de Bereiding. De weg gevolgd tot dusverre werd alzoo gewijzigd, dat de oplossing na filtratie (door zilveroxyde, vermengd met eenig koolzuur zilver) werd geleid nabij de anode, waar een kleine inrichting was geplaatst, bestaande uit *twee kleine trechters* in de vlam aaneengesmolten, en gezet in het kleine glazen reservoir (waarin de anode uitkomt, zie vroegere Verhandelingen); het doel hiervan was, om van de *geneutraliseerde* oplossing te doen komen zoo dicht mogelijk bij de anode, teneinde den invloed van het zuur, dat vrij is geworden als gevolg der electrolyse (en de vorming der zwarte stof) beter op te heffen. De uitkomst was evenwel van negatieven aard, daar de opbrengst in Bereiding N°. 6 de hoeveelheid van 0.005 gr. niet te boven ging, en wat erger is, bij de anode bevond zich azijnzuur zilver in kristallen, daarin zijn verklaring vindende, dat de oplossing aanvankelijk verzadigd was, en de diffusie meer beperkt (overigens is duidelijk, dat het trechtertje, het dichtst geplaatst bij den bodem van het glazen reservoir, een zekere ruimte overliet). De zwarte stof onder deze omstandigheden gemaakt, werd als verloren beschouwd.

Bereidingen N°. 7, N°. 8 en N°. 9. Men volgde denzelfden weg als in Bereiding N°. 5, wat aangaat de inrichting der proef, alleen liet men den tijd veranderen, maar bediende zich overigens evenzoo van een meer of min verzadigde oplossing (vóór de proef was een geringe overmaat aan azijnzuur zilver in kristallen in de oplossing aanwezig).

Ten einde zich eenig denkbeeld te vormen van de betrekkelijke hoeveelheid aan afzetsel op den platinadraad en het glazen reservoir, nemen we Bereiding N°. 7, waar van de 0.013 gr. zwarte stof zich bevond 0.007 gr. op den draad en 0.0043 gr. in het glazen schaalteje, of liever horologeglas (na wasschen); overgebracht in een reageerbuisje, werd de hoeveelheid herleid tot 0.0094 gr. (zie, een weinig verder, de Tabel).

In Bereiding N°. 8 was de platinadraad (die als anode dienst doet) gedeeltelijk gebroken, vandaar waarschijnlijk de geringe opbrengst.

Over een nieuwe wijziging in de bereiding. Alhoewel schijnbaar van weinig beteekenis, is deze toch van eenig belang; zooals kan blijken uit de cijfers (zie een weinig later). Er werd alleen maar genomen een glazen schaalteje van *geringere* afmeting, dat aanleiding zou kunnen geven tot meer diffusie, met betrekking tot het vrije zuur, waarop het wel vooral aankomt. Ook vermeerderde langzamerhand de hoeveelheid zilveroxyde ($Ag_2 O$), waarop reeds werd gewezen. Er is hier sprake van de Bereidingen N°. 10, N°. 11 en N°. 12.

Voorloopige en gedeeltelijke analyse. Aangezien het onmogelijk is, om zich een voldoende hoeveelheid der verbinding te verschaffen met een en dezelfde Bereiding, was men wel genoodzaakt, de methode te volgen van de hoeveelheden stof van verschillende Bereidingen bij elkander te doen, en dus in een en hetzelfde reageerbuisje. Bijgevolg werd telkenmale gewogen vóór en na het inbrengen eener nieuwe hoeveelheid der verbinding, ook met 't oog op een mogelijk gedeeltelijke ontleding (gepaard gaande met verlies aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” van het oxy-azijnzuur zilver, dat geacht wordt te ontstaan). De volgende Tabel geeft daarvan een overzicht, terwijl is opgegeven onder:

- a. het nummer der Bereiding;
- b. het aantal dagen (dag en nacht) der electrolyse;

c. de opbrengst aan zwarte stof op het horologeglas (de stof, daarop komende, was dan gewasschen, ten minste gedeeltelijk). De platinadraad met afzetsel wordt mede gewogen (het gewicht van den draad is namelijk bekend).

d. het totale gewicht *vóór* het inbrengen eener nieuwe hoeveelheid stof in het buisje;

e. de vermeerdering in gewicht telken male *na* het inbrengen eener nieuwe hoeveelheid in het buisje;

f. het *totale* gewicht van zwarte stof (zonder inbegrip der vrijgekomen zuurstof), dus op 't oogenblik *na* het inbrengen eener nieuwe hoeveelheid in het reageerbuisje;

g. het *verlies in gewicht* bij het staan, als gevolg der vrijgekomen zuurstof (zie verschil tusschen *d.* en *f.*).

Nog zij medegedeeld, dat de buis, en deze met de stof, *vóór* iedere weging was geplaatst in een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur zonder of met natrium); en dat de noodige tijd werd gelaten aan de buis, om in evenwicht te komen met de vochtige atmosfeer, *vóór* de eigentlijke weging. Alle bereidingen geschiedden overigens met zilveroxyde ($Ag_2 O$), in plaats van koolzuur zilver (gelijk vroeger plaats had met de electrolyse van zwavelzuur zilver).

Tabel, betreffende de hoeveelheid aan product achtereenvolgens gevormd in de volgende bereidingen, enz.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N ^o . 5	3	0.011 gr.	—	0.008 gr.	0.008 gr.	
„ 7	3	0.013	0.008 gr.	0.0094	0.0174	
„ 8	2	0.0033	0.0173	0.0022	0.0195	0.0001 gr.
„ 9	6	0.0111	0.0195	0.0083	0.0278	
„ 10	3	0.0241	0.0278	0.021	0.0488	
„ 11	3	0.0383	0.0487	0.0343	0.083	0.0001
„ 12	3	0.0327	0.083	0.0298	0.1128	

Bij gevolg had men ter beschikking een hoeveelheid van 0.1128 gr., waarbij dan nog is te voegen 2×0.0001 gr., zal men de oorspronkelijke hoeveelheid hebben, dus met inbegrip van de zuurstof die geëlimineerd is (zijnde de vrucht van een arbeid van ongeveer 43 dagen, dag en nacht, alles mede gerekend). De reageerbuis, die dus werd geacht 0.1128 gr. + 0.0002 gr. aan zwarte stof te bevatten, waarbij water gevoegd, werd geplaatst in een bekerglas met water, (de reageerbuis voorzien van een glazen dop; het geheel van boven voor stof gevrijwaard door een papieren kapje) en langzamerhand verhit bij een hogere temperatuur. Reeds bij 32° (en al lager) vertoonden zich gasbellen. Den eersten dag werd verhit tot 60° — 70° , terwijl nog gas vrij kwam, en verwarmd werd tot zich geen gas meer voordeed en nog langer; zekerheidshalve werd den volgende dag daarenboven verhit bij 70° — 80° . De buis werd daarna geplaatst in een vacuum-exsiccator (dezelfde weg werd gevolgd als bij analyse van het product der electrolyse van zwavelzuur zilver). Er bleef terug 0.108 gr., derhalve van 0.113 gr. der oorspronkelijke stof (zie boven); en bijgevolg heeft men een verschil van 0.005 gr. (zij dit van 4.4 proc.), zijnde dit het verlies in gewicht, hoogstwaarschijnlijk door eliminatie van zuurstof van het *oxy-azijnzuur zilver*.

Bij het terugblijvende werd 3 c. c. water gedaan, en dit achtereenvolgens telken male, met het doel, het oplosbare zilverzout er uit te trekken; later decanteerende, en teruglatende in de reageerbuis het zilverbioxyde (Ag_2O_2). De gedecanteerde oplossing werd telkenmale gedaan in een glazen schaalte, dit geplaatst onder een vacuum-exsiccator en gewogen, achtereenvolgens gevende:

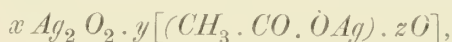
aantal dagen voor het uittrekken	gewicht telkenmale	totaal gewicht.
2	0.0176 gr.	0.0176 gr.
2	0.0051	0.0227
2	0.0006	0.0233
6	0.0003	0.0236
7	0.0003	0.0239.

Na ten slotte geplaatst geweest te zijn onder een vacuum-exsiccator met zwavelzuur en *natrium*, werd dit herleid tot 0.0236 gr.. In het reageerbuisje (geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur en natrium) bleef 0.0851 gr. zilverbioxyde, dat maakt met de uitgetrokken hoeveelheid: $0.0851 \text{ gr.} + 0.0236 \text{ gr.} = 0.1087 \text{ gr.}$, zijnde in den aanvang 0.108 gr. (op gelijke wijze behandeld); zie

vroeger. Er werd een weinig zilverbioxyde medegevoerd, maar de hoeveelheid stof liet niet toe, om te filtreeren. Ook werd de analyse alleen verricht, ten einde zich eenig denkbeeld te vormen niet betrekking tot de samenstelling. En in de eerste plaats blijft nog te doen over, het zilverzout te identifiëren, en aan te toonen, of er geen gedeeltelijke of geheele (gedeeltelijke) oxydatie intreedt van azijnzuur zilver, en omzetting dientengevolge in een ander zilverzout; de beperkte hoeveelheid toch liet een verder strekkende studie niet toe. De oplossing, die aan electrolyse was onderworpen, gaf, bij verdampen van een deel, kristallen van azijnzuur zilver, die vrij schijnen te zijn van een ander zout; zoodat, indien er oxydatie plaats heeft, dit waarschijnlijk intreedt tijdens de analyse. Maar voor 't oogenblik komt het niet waarschijnlijk voor, dat oxydatie optreedt in noemenswaardige mate (tevens met 't oog op de oplosbaarheid van het zilverzout; zie boven).

Over eenige eigenschappen van peroxy-azijnzuur zilver (aangenomen, dat het lichaam waarvan sprake is, zulks is). In 't algemeen zijn de eigenschappen dezelfde als die van peroxy-salpeterzuur en peroxy-zwavelzuur zilver; al dadelijk, wat de kleur betreft, die trouwens meer is naar de zwarte tint, terwijl zich geen glans vertoont. Het is nog niet mogelijk, zich uit te laten over den al of niet amorphen of kristallijnen toestand (onder den microscoop). De wijze, waarop dit lichaam zich verhoudt tegenover water, is in hoofdzaak dezelfde, en het hoofdfeit is ook hier, dat er *zilverbioxyde* (Ag_2O_2) onopgelost terugblijft, terwijl er een zilverzout in oplossing treedt, met vrijkomen van een gas, dat verondersteld wordt *zuurstof* te zijn (trouwens nog te bewijzen). Bij verhitten in de open vlam op platinablik, heeft de ontleding tevens eensklaps plaats.

Samenstelling en structuur. In ieder geval is het lichaam, waarvan sprake is, te beschouwen als een verbinding van *zilverbioxyde* (Ag_2O_2) met een zilverzout van een *koolstofhoudend oxy-zuur*, en zeer waarschijnlijk van *oxy-azijnzuur*. Men heeft overigens de waarde te bepalen der coëfficiënten x , y en z in de formule:



dat niet weinig bezwaar zal ondervinden, lettende op de geringe hoeveelheid stof, waarover vooralsnog is te beschikken, en niet te vergeten den graad van zuiverheid; maar er bestaat kans, er in te slagen, de opbrengst langzamerhand te zien vermeerderen, noo-

dig voor een genoegzaam nauwkeurige analyse. De zuiverheid is ook daarvan ten deele afhankelijk, als in 't algemeen de stof minder verdeeld is, wanneer de opbrengst (in de eenheid van tijd) grooter is.

OVERZICHT.

De uitkomsten der electrolyse van *zwavelzuur zilver* geven een vervolg op de voorgaande Verhandeling; daarentegen is de electrolyse van *azijnzuur zilver* geheel nieuw, en is dus de eersteling eener reeks van proeven met *koolstofhoudende zuren* in dezen zin. In 't kort zijn de uitkomsten van beiden in het volgende teruggegeven, ten einde deze des te beter te leeren kennen.

1°. In den aanvang zijn de omstandigheden nagegaan, die invloed zouden kunnen hebben op de opbrengst, en, wat betrekkelijk van meer beteekenis is, op de hoedanigheid (zuiverheid) van het zwarte product bij electrolyse van *zwavelzuur zilver*. Ook is er sprake van veranderingen, die zijn aangebracht (zie onder 3.), en mogelijk ook aan te brengen zijn in de wijze van bereiding, en tevens sprake van een nieuw beginsel ²⁾.

2°. Een vervolg is gegeven der uitkomsten van eenige vroegere bereidingen ³⁾. En dan volgen uitkomsten van quantitatieve analyses ⁴⁾, terwijl eenige wijzigingen zijn medegedeeld, die werden aangebracht; en tevens de uitkomst van eenige proeven in verband met de analyse ⁵⁾ (b.v. de behandeling van het zwarte lichaam met water bij gewone temperatuur).

3°. De verandering ⁶⁾ ingevoerd bij de bereiding der zwarte stof door electrolyse, bestaat vooral in het toevoegen van een *tweede filtrum*, ditmaal met *zwavelzuur zilver*, met het doel, om de concentratie der oplossing meer of min *constant* te houden (het eerste filtrum bevat *koolzuur zilver*, zie de vorige Verhandeling, ten einde het zuur te neutraliseeren dat vrij is gekomen, als gevolg der electrolyse, nabij de *anode*, vanwaar de oplossing wordt opgevoerd door een schroef van Archimedes, om nabij te *kathode* terug te vloeien, na dus thans *twee filtra* te zijn doorgegaan). Deze wijziging zou den tijd voor de bereiding in zeker opzicht onbepaald kunnen doen zijn, namelijk, ingeval de zelfontleding (overigens in bijzijn

¹⁾ Zie deze Verhandeling pag. 3—9; ²⁾ l. c. pag. 8; ³⁾ l. c. pag. 9; ⁴⁾ l. c. pag. 12; ⁵⁾ l. c. pag. 11; ⁶⁾ l. c. pag. 15.

van een weinig vrij zuur) zich daar niet tegen verzet, indien namelijk de hoeveelheid electrolytische zuurstof de zwarte stof (der electrolyse) in voldoende mate kan te gemoet komen in het verlies aan zuurstof ¹⁾ (de zwarte stof fungeert namelijk als *anode*, als gevolg der geleidbaarheid voor electriciteit); altijd wel te verstaan bij een werken onder de gegeven omstandigheden.

4°. Eenige eigenschappen zijn medegedeeld van peroxy-zwavelzuur zilver ²⁾, van de wijze van ontstaan ³⁾, en die van te worden ontleed ⁴⁾. De vraag is opgeworpen, welke der twee *resten* waarschijnlijk het eerst ontstaat, het zilverbioxyde of het oxy-zwavelzuur zilver ⁵⁾.

5°. Er werd een vergelijking gemaakt tusschen het *oxy-zwavelzuur* $2 SO_7 H_2 = S_2 O_{14} H_4$ (beschouwd deel uit te maken van het peroxy-zwavelzuur zilver als zilverzout, zij dit is $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$) en het overzwavelzuur ⁶⁾ $S_2 O_8 H_2$. Daarbij is tevens opgenomen het product van reactie van overzwavelzuur en geoxydeerd water ⁷⁾.

6°. Ter sprake werd gebracht een andere structuurformule voor het oxy-zwavelzuur ⁸⁾, die overigens niet aanbevelenswaardig schijnt te wezen.

7°. Een enkel woord is gezegd over zilverbioxyde, peroxy-salpeterzuur zilver, en peroxy-zwavelzuur zilver als oxydatie-middelen ⁹⁾, en over de afscheiding der zuren van oxy-salpeterzuur en oxy-zwavelzuur zilver ¹⁰⁾.

8°. Eenige gegevens zijn vermeld betrekking hebbende op de zelfontledings-snelheid van peroxy-zwavelzuur zilver ¹¹⁾.

9°. Daarenboven zijn hier bijgevoegd eenige gegevens betreffende de snelheid der zelfontleding van *peroxy-salpeterzuur zilver* ¹²⁾, wyl men thans kan beschikken over een periode van *drie* jaar; tevens ter vergelijking met peroxy-zwavelzuur zilver. En zoo mede eenige gegevens met betrekking tot de opbrengst van dit lichaam ¹³⁾.

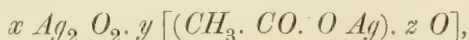
10°. Er wordt mededeeling gedaan van een contrôle-proef met 't oog op de quantitative bepaling van *zilvernitraat* ¹⁴⁾.

11°. Uit een meer algemeen oogpunt werd behandeld de vorming van een zilverzout van een oxy-zuur, namelijk in verbinding met zilverbioxyde ¹⁵⁾.

12°. Er werd een begin gemaakt met de studie der electrolyse

¹⁾ Zie b.v. Bereiding N°. 29, pag. 16; ²⁾ l. c. pag. 18; ³⁾ l. c. pag. 19; ⁴⁾ l. c. pag. 19; ⁵⁾ l. c. pag. 20; ⁶⁾ l. c. pag. 21; ⁷⁾ l. c. pag. 22; ⁸⁾ l. c. pag. 23; ⁹⁾ l. c. pag. 25; ¹⁰⁾ l. c. pag. 25; ¹¹⁾ l. c. pag. 26; ¹²⁾ l. c. pag. 28; ¹³⁾ l. c. pag. 29; ¹⁴⁾ l. c. pag. 26; ¹⁵⁾ l. c. pag. 27.

van *azijnzuur zilver* ¹⁾ ($CH_3 \cdot CO \cdot O Ag$). Evenzoo zet zich aan de *anode* af van een zwart gekleurd lichaam, maar in zeer geringe hoeveelheid, vooral, wanneer wordt gewerkt onder gewone omstandigheden. Door gebruik te maken van *zilveroxyde* ($Ag_2 O$) in plaats van koolzuur zilver, is de opbrengst betrekkelijk beter. De eigenschappen schijnen vrijwel overeen te komen met die van peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver, en alhoewel de vereischte analytische gegevens van quantitatieven aard nog niet voorhanden zijn (azijnzuur zilver zou, ook ten deele, kunnen omgezet worden in een zout van een andere verbinding, afgeleid van azijnzuur) ²⁾, zoo stelt men zich toch voor, dat hier een lichaam optreedt terug te brengen tot de formule:



welk lichaam niet onwaarschijnlijk ten deele den sleutel vormt tot de classieke reactie van Kolbe, betreffende de electrolyse b.v. van een waterige oplossing van kalium*acetaat*, en andere meer of min overeenkomstige verbindingen; en ook dit geeft aan deze studie een hoogere beteekenis.

13°. De ontleding van koolzuur zilver, als bron voor zilveroxyde, gaf aanleiding tot eenige opmerkingen dienaangaande ³⁾.

In de volgende Verhandeling zal in hoofdzaak de studie der electrolyse van azijnzuur zilver meer in bijzonderheden worden nagegaan. Men ontveinst zich evenwel niet de bezwaren, welke nog zijn te overwinnen, en die verre overtreffen de bezwaren verbonden aan de studie der verbinding electrolytisch verkregen met zwavelzuur zilver, en reeds deze zijn niet gering te achten.

Utrecht, 24 Juni 1899.

(1 September 1899).

¹⁾ l. c. pag. 29; ²⁾ l. c. pag. 41; ³⁾ l. c. pag. 35.

On certain Series of Sections
of the Regular Four-dimensional Hypersolids,

BY

ALICIA BOOLE STOTT.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL VII. N°. 3.

(With 22 figures and 14 diagrams.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Februari 1900.

On certain Series of Sections
of the Regular Four-dimensional Hypersolids,

BY

ALICIA BOOLE STOTT.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL VII. N°. 3.

(With 22 figures and 14 diagrams.)



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1900.

On certain Series of Sections of the Regular Four-dimensional Hypersolids.

BY

ALICIA BOOLE STOTT.

1. In making series of sections of the regular four-dimensional figures by the method given in this paper it is only necessary to know the number of solids meeting at each vertex. The total number in each figure can be found by counting the number of solids cut in the sections.

Taking the figures bounded by tetrahedra it is evident that a section by a space cutting the edges meeting in a vertex at equal distances from that vertex will give an equilateral triangular section of each tetrahedron. Hence the complete section will be a three-dimensional regular figure bounded by equilateral triangles.

There are only three such figures, the tetrahedron, the octahedron and the icosahedron; so there will be no other four-dimensional figure bounded by tetrahedra except those which have 4, 8 or 20 at each vertex.

If groups of tetrahedra arranged so that there are 4, 8 or 20 round a point be cut by parallel spaces close enough together to pass at least once through each edge, then the number of tetrahedra cut in the three groups respectively will be 5, 16 or 600.

Next taking cubes. The section of a cube by a space cutting the edges meeting at a vertex at equal distances from that vertex is an equilateral triangle. So there will be no other figure bounded by cubes except those having 4, 8 or 20 at each vertex. But 8

cubes exactly fill three-dimensional space and cannot therefore form a four-dimensional angle. Hence there cannot be a figure whose angles are formed by eight cubes. Still less can there be one whose angles are made by 20. Similar reasoning applies to the dodecahedron; as with the cubes, there is only room round a point for four. Now the figure corresponding to the first case is the 8-cell, that corresponding to the second is the 120-cell.

Taking an octahedron. A section by a space cutting the edges meeting at a vertex equally, is a square, and, as a cube is the only regular three-dimensional figure bounded by squares, there will only be one regular figure bounded by octahedra and that will have six at each vertex. This is the 24-cell.

In this manner we meet successively all the regular cells of four-dimensional space.

2. In making a series of sections of a regular four-dimensional figure by three-dimensional spaces S_1^3 , S_2^3 , etc. parallel to a bounding solid Z , that solid itself may be considered the first element of the series. If Z be in a space S^3 , it is the only part of the figure in that space, but its faces are the surfaces of contact of it with other bounding solids. So that in building up the solids of the figure about Z in their position in four-dimensional space, if such a thing were possible, there would be one on each face. In some cases there are also one or more on each edge and one or more on each vertex. Whether this be so or not, can be determined by means of the number of cells meeting at each vertex in the particular figure under consideration. The solids on the faces of Z may be supposed to turn about those faces until they lie wholly in S^3 and if there be any on the edges and vertices they may be supposed to turn about those edges and vertices until they too lie in S^3 . We represent in fig. 1 the result of such an operation on the 8-cell. The cube HA is the solid originally in the space S^3 ; NA has been turned about its surface of contact with HA , namely the square CA , into S^3 . The cubes PA and SA have been turned about the squares GA and EA respectively into the same space S^3 .

The result of this is that the square LA , which is common to the two cubes NA and PA , has assumed two positions in S^3 . It is e. g. horizontal in PA and vertical in NA .

Similarly MA and OA each appear in two positions in S^3 .

If the 8-cell were cut by a space S_1^3 parallel to S^3 and passing through some point of the edge AK , each of the cubes NA , PA , SA would be cut by a plane parallel to its surface of contact with HA . The positions of these planes in the cubes could easily be determined after they have been brought into the space S^3 . For instance, if S_1^3 bisects AK , the sections of NA , PA and SA will be squares parallel to CA , GA and EA through the midpoint of AK . Similarly there will be square sections of the three cubes at H and the complete section is a cube. Thus there will be three cubes in this series: 1° the cube HA , 2° a cube bounded by the sectional planes parallel to the faces of HA and 3° a cube bounded by the squares PK , NK , SK and the corresponding faces of the cubes about H . This last cube is itself a solid of the 8-cell namely that opposite to HA ¹⁾.

3. Definition 1. — Let a point at a distance n times AB from A on the line AB be the point $A_n B$ or $B_{1-n} A$.

Definition 2. — Let pn be the projection, by a line parallel to the base on to the perpendicular of an equilateral triangle, of a length on the side equal to n times the side ($p = \frac{1}{2} \sqrt{3}$).

The 16-cell.

4. Let $ABCD$, a tetrahedron in S^3 , be one of the bounding solids of a 16-cell.

In this figure there are 8 solids at each vertex, a condition that will be satisfied if a tetrahedron be put on to each face of $ABCD$, one to each edge and one to each vertex. Let the vertices of those on ABC , BCD , CDA , DBA be D' , A' , B' , C' respectively (fig. 2). Then those on the edges will be $AB C' D'$, $BC D' A'$, $CD A' B'$, $DA B' C'$, $AC B D'$, $BD A C'$.

Four of the eight tetrahedra at A are represented in fig. 2.

5. If the 16-cell be cut by a space S_1^3 parallel to S^3 and passing through the point $A_1 D'$, the tetrahedron $ABCD'$ will

¹⁾ This way of dealing with the 8-cell is given in the „Scientific Romances“, No. 1, „What is the fourth Dimension?“ by C. H. Hinton, published by Swan, Sonnenschein & Co, London, 1884, and the subsequent book of the same author: „The New Era of Thought“ London, 1888. Also in considering the 600-cell I received some valuable suggestions from Mr. H. W. Curjel.

be cut by a plane passing through that point and parallel to ABC ; hence its section will be an equilateral triangle with a side equal to $\frac{3}{4} AD'$. In fig. 2 its vertices $A_{\frac{1}{4}}D'$, $B_{\frac{1}{4}}D'$, $C_{\frac{1}{4}}D'$ are indicated as a , b , c . Similarly the sections of $B_3CD A'$, $CD A B'$, $DA B C'$ are equilateral triangles with a side equal to $\frac{1}{4} AD'$. Their vertices are the points $(B_{\frac{1}{4}}A', C_{\frac{1}{4}}A', D_{\frac{1}{4}}A')$, $(C_{\frac{1}{4}}B', D_{\frac{1}{4}}B', A_{\frac{1}{4}}B')$, $(D_{\frac{1}{4}}C', A_{\frac{1}{4}}C', B_{\frac{1}{4}}C')$.

It has been shewn by means of the tetrahedron $ABCD'$ that S_1^3 passes through the points $A_{\frac{1}{4}}D'$, $C_{\frac{1}{4}}D'$, and by the tetrahedron $ACDB'$ that it passes through the points $A_{\frac{1}{4}}B'$, $C_{\frac{1}{4}}B'$. But the edges AD' , CD' are common to $ABCD'$ and $ACB'D'$ and the edges AB' , CB' are common to $ACDB'$ and $ACB'D'$. Hence we have four points on $ACB'D'$ through which S_1^3 passes, giving as section a rectangle with sides $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$ of AD' indicated in fig. 2 by $acde$.

There are also rectangular sections of the tetrahedra on the other edges of $ABCD$.

Again AD' , AB' , AC' are edges of the tetrahedron $AB'C'D'$ and it has been shewn that S_1^3 cuts them in the points $A_{\frac{1}{4}}D'$, $A_{\frac{1}{4}}B'$, $A_{\frac{1}{4}}C'$, giving as section of this tetrahedron an equilateral triangle with side equal to $\frac{1}{4} AD'$. Similarly the section (fig. 3) of each of the tetrahedra on the vertices B , C , and D will be an equilateral triangle with sides equal to $\frac{1}{4} AD'$.

In figure 2 are also indicated the sections of the 16-cell by spaces S_2^3 , S_3^3 parallel S^3 and cutting AD' in the points $A_{\frac{1}{2}}D'$, $A_{\frac{3}{4}}D'$. The shapes are shewn in the figures 4 and 5.

A space S_4^3 parallel to S^3 and passing through D' would also pass through $A'B'$ and C' , giving as the last shape of the series a tetrahedron equal to $ABCD$ oppositely placed, this being the bounding tetrahedron of the 16-cell opposite to $ABCD$.

The 24-cell.

6. Let $ABCDEF$ (fig. 6), an octahedron in a space S^3 , be one of the bounding solids of a 24-cell. In this figure there are 6 solids at each vertex, a condition that will be satisfied if one be

put on to each face and one to each vertex of $A B C D E F$. By an inspection of figure 6 it is clear that

on the face	$A B C$	is the octahedron	$A B C (A B) (B C) (C A),$
„ „ „	$A C E$	„ „ „	$A C E (A C) (C E) (E A),$
„ „ „	$A E F$	„ „ „	$A E F (A E) (E F) (F A),$
„ „ „	$A F B$	„ „ „	$A F B (A F) (F B) (B A),$
„ „ „	$D B C$	„ „ „	$D B C (D B) (B C) (C D),$
„ „ „	$D C E$	„ „ „	$D C E (D C) (C E) (E D),$
„ „ „	$D E F$	„ „ „	$D E F (D E) (E F) (F D),$
„ „ „	$D F B$	„ „ „	$D F B (D F) (F B) (B D).$

In the same manner the octahedron

on A is	$A (A B) (A C) (A E) (A F) A',$
„ B „	$B (A B) (B C) (D B) (B F) B',$
„ C „	$C (A C) (B C) (C D) (C E) C',$
„ D „	$D (B D) (C D) (D E) (D F) D',$
„ E „	$E (A E) (C E) (D E) (E F) E',$
„ F „	$F (A E) (B F) (D F) (E F) F'.$

7. If the 24-cell be cut by a space S_4^3 parallel to S^3 and passing through the point of bisection of $A (A C)$ the octahedron $A (C E)$ will be cut in a plane parallel to $A C E$, and passing through the points of bisection of $C (A C)$, $C (C E)$, $E (A E)$, $A (A E)$, $E (C E)$; the section will be a regular hexagon $(a b c d e f)$.

Similarly the sections by S_4^3 of the remaining seven octahedra on the faces of $A B C D E F$ are regular hexagons.

Now in the octahedron $A (C E)$ we see that S_4^3 passes through the points $A_{\frac{1}{2}} (A C)$, $A_{\frac{1}{2}} (A E)$ and in the octahedron $A (F B)$ we see that it passes through $A_{\frac{1}{2}} (A B)$ and $A_{\frac{1}{2}} (A F)$. But the lines $A (A C)$, $A (A E)$ and $A (A F)$, $A (A B)$ are also edges of the octahedron $A A'$, whence we find that the section by S_4^3 of this octahedron is a square with side equal to half the edge of the 24-cell. There will be similar square sections of the octahedra on B , C , D , E , F .

The shape is shewn in fig. 7; it is a combination of octahedron and cube, in the crystallographic sense, the octahedron predominating.

Let S_2^3 be a space parallel to S^3 and passing through $(A C)$, it will also pass through $(C E)$, $(A E)$. So that it coincides with that face of the octahedron $A (C E)$.

It also coincides with the face $(AB)(AF)(BF)$ of the octahedron $A(BF)$. The points (AB) , (AF) , (AE) , (AC) are the vertices of a square section of the octahedron AA' . This section of the 24-cell, then, is bounded by 8 equilateral triangles, and 6 squares, the sides being equal to the edges of the 24-cell. The shape (fig. 8) is that of the combination of octahedron and cube in equilibrium.

The octahedra already grouped about the octahedron AD give 4 solids at (AC) , namely AA' , $A(CE)$, CC' , $A(BC)$; of these the first two only are shewn in figure 6.

Putting one on the face $(AC)(CE)(AE)$ and one on the face $(AB)(AC)(BC)$ we have the required number 6 at (AC) . There will be similarly placed octahedra at (AB) , (AF) , etc.

Another parallel space S_3^3 passing through the middle point of $(AC)A'$ will give a square section of AA' and square sections of the octahedra CC' and EE' . These three squares determine the section of $(AC)E'$; it is a regular hexagon. This shape then is like the section by S_4^3 . A space S_4^3 parallel to S_3^3 and passing through A' will coincide with the octahedron $A'B'C'D'E'F'$.

The 120-cell.

8. The sections of this cell can be deduced in a similar manner to that in which those of the 16-cell and 24-cell were obtained.

The plans are given in the diagrams VIII—XIV.

The 600-cell.

9. Let $ABCD$, a tetrahedron in S^3 , be one of the bounding solids of a 600-cell. In this figure there are 20 solids at each vertex and this condition is satisfied at the vertices of $ABCD$ if a tetrahedron be put on to each of its faces, two to each edge and 10 to each vertex. The bases of the tetrahedra in each of these groups of 20 are the faces of an icosahedron ¹⁾. Let IA be that one which is bounded by the bases of the tetrahedra meeting at A . The vertex of the tetrahedron on ABC as base is D' and the vertex of the one on ACD' is (AC) ; the tetrahedron on $AD'(AC)$ is $AD'(AC)(A_D)$, likewise that on $A(AC)(A_D)$ is $A(AC)(A_D)(A_B)$ and that on $A(A_D)(A_B)$ is $A(A_D)(A_B)(A_C)$.

¹⁾ The sections of such icosahedra appear as zones on the sections of the 600-cell.

Thus $(A_B)(A_C)(A_D)$ is the face opposite to BCD on IA (fig. 9 and 10), etc.

The five tetrahedra just given are all differently related to $ABCD$ and, if they be taken as types, the vertices of the remaining tetrahedra about $ABCD$ may at once be written down and can then easily be placed in space. For instance there are four of the form $ABCD'$. The form $ACB'(AC)$ gives two tetrahedra on AC namely $ACB'(AC)$ and $ACD'(AC)$ and also two on each of the other edges as $BCD'(BC)$ and $BCA'(BC)$ on BC , and so on. The form $AD'(AC)(A_D)$ gives six tetrahedra touching A arranged in pairs:

$$\begin{aligned} AD'(AC)(A_D) \text{ and } AD'(AB)(A_D), \\ AC'(AB)(A_C) \text{ ,, } AC'(AD)(A_C), \\ AB'(AC)(A_B) \text{ ,, } AB'(AD)(A_B) \end{aligned}$$

and also those about B , C , and D . So $A(AC)(A_D)(A_B)$ gives three tetrahedra about A namely $A(AC)(A_D)(A_B)$, $A(AB)(A_C)(A_D)$ and $A(AD)(A_B)(A_C)$; about B are $B(BC)(B_A)(B_D)$ and so on.

There are also four of the form $A(A_B)(A_C)(A_D)$. The remaining vertices of the 600-cell are named as follows: A_1 is the vertex of the tetrahedron on $(A_B)(A_C)(A_D)$, $(A'B)$ is the vertex of the tetrahedron on $(AB)(A_C)(A_D)$ and $A'(A'_B)(A'_C)(A'_D)$ is related to $A'BCD$ as $A(A_B)(A_C)(A_D)$ is to $ABCD$ (see list of vertices).

The tetrahedron on the side of the 600-cell opposite to $ABCD$ is $\alpha\beta\gamma\delta$, the lines drawn from A to α , from B to β and so on being diameters of the figure.

The arrangement of tetrahedra about $\alpha\beta\gamma\delta$ is similar to that about $ABCD$, so that the vertices opposite to those already given may be written down by simply changing A into α , B into β , C into γ , D into δ .

10. Let the 600-cell be cut by a space S_1^3 passing through the points $A'B'C'D'$. It will be parallel to S^3 . Now S_1^3 and IA intersect in a plane passing through the points B', C', D' , fig. 11. To find where this plane cuts the lines $B(AB)$, $C(AC)$, $D(AD)$, let IA be projected on a plane passing through $C', (A_C), (AC), C$.

This projection is shewn in fig. 18, where R, M, O, P are the points $C', (A_C), (A C), C$, and N is the middle point of $(A_D)(A_B)$, $R V$ is drawn parallel to $M N$ and $V O$ is the distance from $A C$ at which the plane cuts $C(A C)$. Let $V O$ be a times $P O$ and we have the points $(A B)_a B, (A C)_a C, (A D)_a D$; for the remaining vertices of this form see list of vertices and diagram I.

Again S_1^3 and $I D'$ intersect in a plane passing through the points $(C A)_a C, (C A)_a A, (A B)_a A, (A B)_a B, (B C)_a B, (B C)_a C$, of fig. 12.

Let $R M O P$, fig. 18, be a projection of $I D'$ on a plane through $(A B)(D'_C)(C_D) C$. Then $R q = p a$ and $q V_1$ is parallel to $M N$. It will be found that $V_1 P = a$ times $O P$, whence we have the points $C_a(C_D), A_a(A_D), B_a(B_D)$ of fig. 12.

From this it will be seen that the tetrahedron $A(A_B)(A_C)(A_D)$ is cut in the points $A_a(A_B), A_a(A_C), A_a(A_D)$ (fig. 13, $p q r$); likewise $A(A C)(A_B)(A_D)$ is cut in the points $A_a(A_B), A_a(A_D), (A C)_a A$ (fig. 13, $p r s$) and $A D' (A C)(A_D)$ is cut in the points $(A C)_a A, A_a(A_D), D'$ (fig. 13, $s r D'$).

The tetrahedron $A C D' (A C)$ is cut in the points $(A C)_a A, (A C)_a C, D'$ (fig. 13, $s t D'$).

Here we have a section of a tetrahedron of each type given in Fig. 10 except $A B C D$ which is not cut by S_1^3 , and as the tetrahedra of each type are all similarly related to $A B C D$ their sections will be equal.

In constructing the model of this section of the 600-cell there will be four equilateral triangles ($p q r$) related to each other as the vertices of a tetrahedron.

The sides of the equilateral triangles are the bases of isosceles triangles ($p r s$, fig. 13) and the sides of these isosceles triangles are the bases of other isosceles triangles ($s r D'$). The last isosceles triangles are arranged in pairs with a common side, and the other sides are the sides of isosceles triangles ($s t D'$).

One of the four similar regions of this model is given in diagram I (N, M', L'); these regions are connected by triangles (M).

11. Let the 600-cell be cut by a space S_2^3 passing through $(A B), (A C), (A D), (B C), (B D), (C D)$. This is parallel to S_1^3 . Here

$I(A_D)$ and S_1^3 intersect in a plane passing through the points $D' A_a(A B), A_a(A_C)$.

A projection of this on a plane through $A D' (A \delta) A_1$ is given in fig. 19. There $D'r$ is the projection of the plane of intersection of $I A_D$ and S_1^3 ; $A r$ is made equal to $p a$ and the line $D'r$ divides $(A B) A$ in the ratio $a: 1-a$; $V r_1$ is drawn through $(A B)$ and is parallel to $D'r$. Then we have $r_1(A_C) = p a$.

Also let the length of which $D' V$ is the projection be equal to c times the edge, from which we see that S_2^3 passes through the points $(A_C)_a A, (A_B)_a A, D'_c(D'_C), D'_c(D'_B)$. In diagram II these points are 2, 1, 14, 11; 6 and 5 are $(A B)$ and $(A C)$. A plane through $I A$ parallel to $B C D$ and passing through the points $(A B), (A C), (A D)$ gives the points $D'_a(A_D), B'_a(A_B), C'_a(A_C)$, the first of these being point 8 of diagram II, fig. 11, (see list of vertices).

This model is constructed in the same way as the first. The points where the sectional space cuts the edges of the 600-cell are determined by means of the icosahedra¹⁾ and are then found on the individual tetrahedra.

12. Let the 600-cell be cut by a space S_3^3 through $(A_B), (A_C), (A_D), (B_A), (B_C), (B_D), (C_A), (C_B), (C_D), (D_A), (D_B), (D_C)$; this is parallel to S_2^3 and its intersection with $I(A_D)$ is given in projection by the line $V_1(A_C)$ parallel to $V r_1$ (fig. 19). Now V_1 bisects $D'(D'_C)$, and let $(A B) S$ be equal to f times the edge. Again $V_1(A_C)$ divides $(A B)(D'_C)$ in the ratio $a: 1-a$. We have then the points $(A B)_f (A^2 B), (A C)_f (A^2 C), (A B)_a(D'_C), (A C)_a(D'_B), D'_{\frac{1}{2}}(D'_C), D'_{\frac{1}{2}}(D'_B)$; see on diagram III the points 6, 5, 13, 14, 18, 8; 1 and 2 are (A_B) and (A_C) (consult list of vertices).

13. Let the 600-cell be cut by a space S_4^3 through $(A'_B), (A'_C), (A'_D), (B'_A), (B'_C), (B'_D), (C'_A), (C'_B), (C'_D), (D'_A), (D'_B), (D'_C)$; this is parallel to S^3 . The intersection of S_4^3 and $I(A_D)$ is shewn in projection by the line $(D'_C) r_2$ parallel to $V_1(A_C)$, fig. 19.

¹⁾ See foot note on page 8.

Here $T(A^2B) = f$ times the edge; r_2 bisects $(A_C)A_1$ and $(D'_C)r_2$ divides $(A^2B)(A_C)$ in the ratio $a : 1-a$.

This gives the points $(A_C)_{\frac{1}{2}}A_1$, $(A_B)_{\frac{1}{2}}A_1$, $(A^2B)_a(A_C)$, $(A^2C)_a(A_B)$, $(A^2B)_f(AB)$, $(A^2C)_f(AC)$. See on diagram IV the points (5, 4, 6, 3, 7, 2); 8 and 1 are the points (D'_C) , (D'_B) .

Again IA_1 and S^3_4 intersect in a plane through the point $(A^2C)_a(A_B)$ and parallel to (A_D) , (A_B) , (A_C) . This is shewn in projection in fig. 22. It gives the points $(A_B)_a(A\beta)$, $(A^2C)_a(A_D)$, $(A_D)_a(A\delta)$, $(A^2B)_a(A_D)$.

14. Let the 600-cell be cut by a space S^3_5 in points (A^2B) , (AB^2) , (A^2C) , (AC^2) , (A^2D) , (AD^2) , (B^2C) , (BC^2) , (C^2D) , (CD^2) , (B^2D) , (BD^2) ; it will be parallel to S^3 . The line I_2r_3 , parallel to $(D'_C)r_2$ and passing through (A^2B) , (fig. 19), is the projection of the intersection of $I(A_D)$ and S^3_5 . Comparing this with the line Vr_1 , we have $A_1r_3 = pc$ and $(D'_C)V_2 = pa$.

This gives the points $(A_1)_c(A_C)$, $(A_1)_c(A_B)$, $(D'_C)_a(A\delta)$, $(D'_B)_a(A\delta)$ (on plate V the points 4, 3, 6, 1; 5 and 2 are (A^2B) and (A^2C) , etc.).

The solid IA_1 and S^3_5 intersect in a plane passing through (A^2B) , (A^2C) , (A^2D) and this plane passes through $(A\delta)_a(A_D)$, $(A\beta)_a(A_B)$, $(A\gamma)_a(A_C)$, fig. 22.

The space S^3_5 and $I\delta_1$ intersect in a plane through $(D'_B)_a(A\delta)$ that is parallel to $(D'_B)(D'_A)(D'_C)$. This plane is projected in the line rv , fig. 20.

Let $I(D'_A)$ be called h times the edge and we have the points $(D'_A)_h(\delta^2\alpha)$, $(D'_B)_h(\delta^2\beta)$, $(D'_C)_h(\delta^2\gamma)$.

Again S^3_4 and $I(A\delta)$ intersect in a plane through (D'_C) , (D'_B) , $(A_D)_{\frac{1}{2}}A_1$, fig. 21. Here $(D'_B)V$ and a parallel plane through $(A^2B)(A^2C)$ is projected in the line rv_1 giving $A_1V_1 = c$ times the edge and $(D'_B)r = pf$. Whence we have the points $(A_1)_c(A_D)$, $(D'_B)_f\delta_1$, $(D'_C)_f\delta_1$ see list.

In diagram V the zone on IA_1 is 23, 5, 12, 2, 15, 13 and that on $I\delta_1$ is 2, 7, 5, 8, 9, 10, 11.

15. Let the 600-cell be cut by a space S_6^3 through $A_1 B_1 C_1 D_1$ parallel to S^3 ; $I(A_D)$ intersects S_6^3 in a plane through A_1 parallel to its intersection with S_5^3 .

In fig. 19 this plane is projected in the line $A_1 V_3$ and comparing this with $D' r$ we have the points $(A\delta)_a (D'_C)$, $(A\delta)_a (D'_B)$, $(A^2 B)_a (A\delta)$, $(A^2 C)_a (A\delta)$ (diagram VI points 1, 3, 4, 2, 5). Here $I\delta_1$ and S_6^3 intersect in a plane parallel to $(D'_A)(D'_B)(D'_C)$ through $(A\delta)_a (D'_B)$. This plane is projected in the line $r_1 v_1$, fig. 20, where $r_1 (A\delta) = pa$. Then $(D'_A) V_1 = a$ times the edge, whence we have the points $(D'_A)_a (\delta^2 \alpha)$, $(D'_B)_a (\delta^2 \beta)$, $(D'_C)_a (\delta^2 \gamma)$ (diagram VI points 12, 11, 13).

Now S_6^3 and IA_1 intersect in a plane parallel to $(A_B)(A_C)(A_D)$ and passing through the points $(A^2 B)_a (A\delta)$.

In fig. 22 the line $(A^2 B)(A\delta)$ is divided in the ratio $a: 1-a$ and through the point of division a line $r V_1$ is drawn parallel to $(A_D)(A_B)$.

Let $(A^2 B)r = m$ times the edge, and it will be found that $(A\delta)(A_D)$ is divided in the ratio $h: 1-h$, $(A^2 C)(A\delta)$ is divided in the ratio $a: 1-a$, $(A^2 C)(\alpha'_\gamma)$ is divided in the ratio $m: 1-m$, $(A^2 C)(A\beta)$ is divided in the ratio $a: 1-a$ and finally $V_1(I\beta) = h$ times the edge; whence we have the points

$$\begin{aligned} & (A^2 B)_m (\alpha'_\beta), \quad (A^2 B)_a (A\delta), \quad (A^2 B)_a (A\gamma), \quad (A\delta)_h (A_D), \\ & (A\gamma)_h (A_C), \quad (A^2 C)_a (A\delta), \quad (A^2 D)_a (A\gamma), \quad (A^2 D)_m (\alpha'_\delta), \\ & (A^2 C)_m (\alpha'_\gamma), \quad (A^2 C)_a (A\beta), \quad (A^2 D)_a (A\beta), \quad (A\beta)_h (A_B). \end{aligned}$$

Here S_6^3 and $I(A\delta)$ intersect in a plane through A_1 parallel to the intersection of S_5^3 with $I(A\delta)$; $A_1 r_2$, fig. 21, is a projection of this plane. Let $(D'_B) r_2 = pn$. It will be found that $(A^2 C)(\alpha'_\gamma)$ is cut in the ratio $m: 1-m$, $(A^2 C)(\delta^2 \beta)$ is cut in the ratio $c: 1-c$, $(D'_B)(\delta^2 \beta)$ is cut in the ratio $a: 1-a$, whence we have the points $(A^2 C)_m (\alpha'_\gamma)$, $(A^2 B)_m (\alpha'_\beta)$, $(A^2 C)_c (\delta^2 \beta)$, $(A^2 B)_c (\delta^2 \gamma)$, $(D'_B)_a (\delta^2 \beta)$, $(D'_C)_a (\delta^2 \gamma)$, $(D'_B)_n \delta_1$, $(D'_C)_n \delta_1$. These are, diagram VI, the points 15, 22, 24, 23, 11, 13, 26, 25, see list.

16. Let the 600 cell be cut by a space S_7^3 through $(A\beta)$, $(A\gamma)$, $(A\delta)$, $(B\alpha)$, $(B\gamma)$, $(B\delta)$, $(C\alpha)$, $(C\beta)$, $(C\delta)$, $(D\alpha)$, $(D\beta)$, $(D\gamma)$. Then $I A_1$ and S_7^3 intersect in a plane through $(A\beta)$, $(A\gamma)$, $(A\delta)$, fig. 22, $(A\beta) r_1$. It also passes through the points $(A^2 B)_a (\alpha'_\beta)$, $(A^2 C)_a (\alpha'_\gamma)$, $(A^2 D)_a (\alpha'_\delta)$ (diagram VII points 3, 1 and 2). And S_7^3 and $I \delta_1$ intersect in a plane through $(A\delta)$, $(B\delta)$, $(C\delta)$, shewn in projection by the line $(A\delta) V_2$, fig. 20. This gives the points $(\delta^2 \alpha)_a (D'_A)$, $(\delta^2 \beta)_a (D'_B)$, $(\delta^2 \gamma)_a (D'_C)$, i. e. the points 6, 5 and 4 of diagram VII. Likewise S_7^3 and $I (A\delta)$ intersect in a plane through $(A^2 C)_a (\alpha'_\gamma)$ and parallel to the intersection of $I (A\delta)$ and S_6^3 . This plane is shewn in projection by the line $V_2 r_3$, fig. 21; $A_1 V_2$ and $\delta_1 r_3$ are equal to pf ; $(A^2 C) (\delta^2 \beta)$ is bisected, so that we have the points $(A_1)_f (\alpha'_\gamma)$, $(A_1)_f (\alpha'_\beta)$, $(\delta_1)_f (D'_B)$, $(\delta_1)_f (D'_C)$, $(A^2 C)_a (\alpha'_\gamma)$, $(A^2 B)_a (\alpha'_\beta)$, $(\delta^2 \beta)_a (D'_B)$, $(\delta^2 \gamma)_a (D'_C)$, $(A^2 C)_{\frac{1}{2}} (\delta^2 \beta)$, $(A^2 B)_{\frac{1}{2}} (\delta^2 \gamma)$. In diagram VII these points correspond to 7, 8, 12, 11, 1, 3, 5, 4, 10, 9. The symmetry shews that this is the central section; the other sections are now repeated in reverse order.

In practically constructing the sections I have found that their symmetry is made more obvious by colouring the faces. The letters on the faces of diagrams I—XIV denote colours, the plane and accented letters denote corresponding colours and the remaining sections are the same as those given with the plane and accented letters interchanged.

17. Numbers of tetrahedra of each colour in the 600-cell as shewn by the sections.

L	and	L'	21 each,	42
M	„	M'	60 each,	120
N	„	N'	72 „ „	144
P	„	P'	24 „ „	96
R	„	R'		
S	„	S'	12 „ „	48
T	„	T'		
		X	48	48
		Y	96	96
		Z	6	6

Total . . 600

List of the 120 vertices of the 600-cell,

$$A, B, C, D, \\ A', B', C', D',$$

$$(AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD),$$

$$(A_B), (A_C), (A_D), (B_A), (B_C), (B_D), (C_A), (C_B), (C_D), (D_A), (D_B), (D_C), \\ (A'_B), (A'_C), (A'_D), (B'_A), (B'_C), (B'_D), (C'_A), (C'_B), (C'_D), (D'_A), (D'_B), (D'_C), \\ (A^2_B), (A^2_C), (A^2_D), (B^2_A), (B^2_C), (B^2_D), (C^2_A), (C^2_B), (C^2_D), (D^2_A), (D^2_B), (D^2_C),$$

$$A_1, B_1, C_1, D_1,$$

$$(A\beta), (A\gamma), (A\delta), (B\alpha), (B\gamma), (B\delta), (C\alpha), (C\beta), (C\delta), (D\alpha), (D\beta), (D\gamma),$$

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1,$$

$$(\alpha^2_\beta), (\alpha^2_\beta), (\alpha^2_\gamma), (\alpha^2_\gamma), (\alpha^2_\delta), (\alpha^2_\delta), (\beta^2_\gamma), (\beta^2_\gamma), (\beta^2_\delta), (\beta^2_\delta), (\gamma^2_\delta), (\gamma^2_\delta), (\gamma^2_\beta), (\gamma^2_\beta), \\ (\alpha'_\beta), (\alpha'_\gamma), (\alpha'_\delta), (\beta'_\alpha), (\beta'_\gamma), (\beta'_\delta), (\gamma'_\alpha), (\gamma'_\beta), (\gamma'_\delta), (\delta'_\alpha), (\delta'_\beta), (\delta'_\gamma), \\ (\alpha_\beta), (\alpha_\gamma), (\alpha_\delta), (\beta_\alpha), (\beta_\gamma), (\beta_\delta), (\gamma_\alpha), (\gamma_\beta), (\gamma_\delta), (\delta_\alpha), (\delta_\beta), (\delta_\gamma),$$

$$(\alpha\beta), (\alpha\gamma), (\alpha\delta), (\beta\gamma), (\beta\delta), (\gamma\delta),$$

$$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

List of vertical points of sections. ¹⁾

Diagram I.

$$A', B'_{(9)}, C'_{(7)}, D'_{(8)},$$

$$A_a(A_{B(1)}), B_a(B_{A(1)}), C_a(C_{A(1)}), D_a(D_{A(1)}),$$

$$A_a(A_{C(2)}), B_a(B_{C(2)}), C_a(C_{B(2)}), D_a(D_{B(2)}),$$

$$A_a(A_{D(3)}), B_a(B_{D(3)}), C_a(C_{D(3)}), D_a(D_{C(3)}),$$

$$(AB)_a A_{(6)}, (AC)_a A_{(5)}, (AD)_a A_{(4)}, (BC)_a B, (BD)_a B, (CD)_a C,$$

$$(AB)_a B_{(11)}, (AC)_a C_{(12)}, (AD)_a D_{(10)}, (BC)_a C, (BD)_a D, (CD)_a D.$$

Diagram II.

$$(AB)_{(6)}, (AC)_{(5)}, (AD)_{(4)}, (BC), (BD), (CD),$$

¹⁾ The small numbers between brackets refer to the numbered points in the diagrams.

$$\begin{aligned}
& (A_{B'})_a A_{(1)}, (B_{A'})_a B, (C_{A'})_a C, (D_{A'})_a D, \\
& (A_{C'})_a A_{(2)}, (B_{C'})_a B, (C_{B'})_a C, (D_{B'})_a D, \\
& (A_{D'})_a A_{(3)}, (B_{D'})_a B, (C_{D'})_a C, (D_{C'})_a D, \\
& A'_a (B_A), B'_a (A_{B'})_{(9)}, C'_a (A_{C'})_{(7)}, D'_a (A_{D'})_{(8)}, \\
& A'_a (C_A), B'_a (C_{B'}), C'_a (B_C), D'_a (B_{D'})_{(16)}, \\
& A'_a (D_A), B'_a (D_{B'}), C'_a (D_C), D'_a (C_{D'})_{(17)}, \\
& A'_c (A'_B), B'_c (B'_A), C'_c (C'_A), D'_c (D'_A)_{(15)}, \\
& A'_c (A'_C), B'_c (B'_C)_{(12)}, C'_c (C'_B)_{(10)}, D'_c (D'_B)_{(11)}, \\
& A'_c (A'_D), B'_c (B'_D)_{(19)}, C'_c (C'_D)_{(18)}, D'_c (D'_C)_{(14)}.
\end{aligned}$$

Diagram III.

$$\begin{aligned}
& (A_{B'})_{(1)}, (B_A), (C_A), (D_A), \\
& (A_{C'})_{(2)}, (B_C), (C_B), (D_B), \\
& (A_{D'})_{(3)}, (B_D), (C_D), (D_C), \\
& (AB)_f (A^2 B)_{(6)}, (AB)_f (AB^2)_{(22)}, \\
& (AC)_f (A^2 C)_{(5)}, (AC)_f (AC^2)_{(20)}, \\
& (AD)_f (A^2 D)_{(4)}, (AD)_f (AD^2)_{(21)}, \\
& (BC)_f (B^2 C), (BC)_f (BC^2), \\
& (BD)_f (B^2 D), (BD)_f (BD^2), \\
& (CD)_f (C^2 D), (CD)_f (CD^2), \\
& (AB)_a (C'_D)_{(12)}, (AC)_a (B'_D)_{(15)}, (AD)_a (B'_C)_{(10)}, (BC)_a (A'_D), (BD)_a (A'_C), (CD)_a (A'_B), \\
& (AB)_a (D'_C)_{(13)}, (AC)_a (D'_B)_{(14)}, (AD)_a (C'_B)_{(11)}, (BC)_a (D'_A), (BD)_a (C'_A), (CD)_a (B'_A), \\
& A'_{\frac{1}{2}}(A'_B), B'_{\frac{1}{2}}(B'_A), C'_{\frac{1}{2}}(C'_A), D'_{\frac{1}{2}}(D'_A)_{(25)}, \\
& A'_{\frac{1}{2}}(A'_C), B'_{\frac{1}{2}}(B'_C)_{(9)}, C'_{\frac{1}{2}}(C'_B)_{(17)}, D'_{\frac{1}{2}}(D'_B)_{(8)}, \\
& A'_{\frac{1}{2}}(A'_D), B'_{\frac{1}{2}}(B'_D)_{(16)}, C'_{\frac{1}{2}}(C'_D)_{(7)}, D'_{\frac{1}{2}}(D'_C)_{(18)}.
\end{aligned}$$

Diagram IV.

$$\begin{aligned}
& (A'_B), (B'_A), (C'_A), (D'_A)_{(24)}, \\
& (A'_C), (B'_C)_{(19)}, (C'_B)_{(21)}, (D'_B)_{(1)}, \\
& (A'_D), (B'_D)_{(18)}, (C'_D)_{(22)}, (D'_C)_{(8)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A_B)_{\frac{1}{2}} A_{\frac{1}{2}(4)}, (B_A)_{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{2}}, (C_A)_{\frac{1}{2}} C_{\frac{1}{2}}, (D_A)_{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}}, \\
& (A_C)_{\frac{1}{2}} A_{\frac{1}{2}(5)}, (B_C)_{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{2}}, (C_B)_{\frac{1}{2}} C_{\frac{1}{2}}, (D_B)_{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}}, \\
& (A_D)_{\frac{1}{2}} A_{\frac{1}{2}(27)}, (B_D)_{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{2}}, (C_D)_{\frac{1}{2}} C_{\frac{1}{2}}, (D_C)_{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}}, \\
& (A_B)_a (A\beta)_{(10)}, (B_A)_a (B\alpha), (C_A)_a (C\alpha), (D_A)_a (D\alpha), \\
& (A_C)_a (A\gamma)_{(11)}, (B_C)_a (B\gamma), (C_B)_a (C\beta), (D_B)_a (D\beta), \\
& (A_D)_a (A\delta)_{(9)}, (B_D)_a (B\delta)_{(25)}, (C_D)_a (C\delta)_{(26)}, (D_C)_a (D\gamma), \\
& (A^2 B)_f (AB)_{(7)}, (AB^2)_f (AB)_{(24)}, \\
& (A^2 C)_f (AC)_{(2)}, (AC^2)_f (AC)_{(17)}, \\
& (A^2 D)_f (AD)_{(4)}, (AD^2)_f (AD)_{(20)}, \\
& (B^2 C)_f (BC), (BC^2)_f (BC), \\
& (B^2 D)_f (BD), (BD^2)_f (BD), \\
& (C^2 D)_f (CD), (CD^2)_f (CD), \\
& (A^2 C)_a (A_B)_{(3)}, (A^2 D)_a (A_B)_{(13)}, \\
& (A^2 D)_a (A_C)_{(14)}, (A^2 B)_a (A_C)_{(6)}, \\
& (A^2 B)_a (A_D)_{(16)}, (A^2 C)_a (A_D)_{(12)}, \\
& (B^2 C)_a (B_A), (B^2 D)_a (B_A), \\
& (B^2 D)_a (B_C), (B^2 A)_a (B_C), \\
& (B^2 A)_a (B_D), (B^2 C)_a (B_D), \\
& (C^2 B)_a (C_A), (C^2 D)_a (C_A), \\
& (C^2 D)_a (C_B), (C^2 A)_a (C_B), \\
& (C^2 A)_a (C_D), (C^2 B)_a (C_D), \\
& (D^2 B)_a (D_A), (D^2 C)_a (D_A), \\
& (D^2 C)_a (D_B), (D^2 A)_a (D_B), \\
& (D^2 A)_a (D_C), (D^2 B)_a (D_C).
\end{aligned}$$

Diagram V.

$$\begin{aligned}
& (A^2 B)_{(5)}, (A^2 C)_{(2)}, (A^2 D)_{(13)}, (B^2 C), (B^2 D), (C^2 D), \\
& (AB^2)_{(22)}, (AC^2)_{(30)}, (AD^2)_{(17)}, (BC^2), (BD^2), (CD^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A_1)_c (A_B)_{(3)}, (B_1)_c (B_A), (C_1)_c (C_A), (D_1)_c (D_A), \\
& (A_1)_c (A_C)_{(4)}, (B_1)_c (B_C), (C_1)_c (C_C), (D_1)_c (D_B), \\
& (A_1)_c (A_D)_{(7)}, (B_1)_c (B_D), (C_1)_c (C_D), (D_1)_c (D_C), \\
& (A\beta)_a (A_B)_{(23)}, (B\alpha)_a (B_A), (C\alpha)_a (C_A), (D\alpha)_a (D_A), \\
& (A\gamma)_a (A_C)_{(15)}, (B\gamma)_a (B_C), (C\beta)_a (C_B), (D\beta)_a (D_B), \\
& (A\delta)_a (A_D)_{(12)}, (B\delta)_a (B_D), (C\delta)_a (C_D), (D\gamma)_a (D_C), \\
& (A'_B)_h (\alpha^2\beta), (B'_A)_h (\alpha\beta^2), (C'_A)_h (\alpha\gamma^2), (D'_A)_h (\alpha\delta^2)_{(27)}, \\
& (A'_C)_h (\alpha^2\gamma), (B'_C)_h (\beta^2\gamma)_{(16)}, (C'_B)_h (\beta\gamma^2)_{(18)}, (D'_B)_h (\beta\delta^2)_{(11)}, \\
& (A'_D)_h (\alpha^2\delta), (B'_D)_h (\beta^2\delta)_{(13)}, (C'_D)_h (\delta\gamma^2)_{(21)}, (D'_C)_h (\gamma\delta^2)_{(8)}, \\
& (A'_B)_a (C\alpha), (A'_B)_a (D\alpha), \\
& (A'_C)_a (D\alpha), (A'_C)_a (B\alpha), \\
& (A'_D)_a (B\alpha), (A'_D)_a (C\alpha), \\
& (B'_A)_a (C\beta), (B'_A)_a (D\beta), \\
& (B'_C)_a (D\beta), (B'_C)_a (A\beta)_{(15)}, \\
& (B'_D)_a (A\beta)_{(14)}, (B'_D)_a (C\beta), \\
& (C'_A)_a (B\gamma), (C'_A)_a (D\gamma), \\
& (C'_B)_a (D\gamma), (C'_B)_a (A\gamma)_{(19)}, \\
& (C'_D)_a (A\gamma)_{(20)}, (C'_D)_a (B\gamma), \\
& (D'_A)_a (B\delta)_{(28)}, (D'_A)_a (C\delta)_{(26)}, \\
& (D'_B)_a (C\delta)_{(25)}, (D'_B)_a (A\delta)_{(1)}, \\
& (D'_C)_a (A\delta)_{(6)}, (D'_C)_a (B\delta)_{(29)}, \\
& (A'_B)_f \alpha, (B'_A)_f \beta, (C'_A)_f \gamma, (D'_A)_f \delta_{(24)}, \\
& (A'_C)_f \alpha, (B'_C)_f \beta, (C'_B)_f \gamma, (D'_B)_f \delta_{(10)}, \\
& (A'_D)_f \alpha, (B'_D)_f \beta, (C'_D)_f \gamma, (D'_C)_f \delta_{(9)}.
\end{aligned}$$

Diagram VI.

$$\begin{aligned}
& A_{1(1)}, B_1, C_1, D_1, \\
& (A^2B)_a (A\delta)_{(2)}, (A^2B)_a (A\gamma)_{(21)}, \\
& (A^2C)_a (A\beta)_{(16)}, (A^2C)_a (A\delta)_{(5)}, \\
& (A^2D)_a (A\gamma)_{(19)}, (A^2D)_a (A\beta)_{(18)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (AB^2)_a (B\gamma), \quad (AB^2)_a (B\delta), \\
& (B^2C)_a (B\delta), \quad (B^2C)_a (B\alpha), \\
& (B^2D)_a (B\alpha), \quad (B^2D)_a (B\gamma), \\
& (AC^2)_a (C\beta), \quad (AC^2)_a (C\delta), \\
& (BC^2)_a (C\delta), \quad (BC^2)_a (C\alpha), \\
& (C^2D)_a (C\alpha), \quad (C^2D)_a (C\beta), \\
& (AD^2)_a (D\beta), \quad (AD^2)_a (D\gamma), \\
& (BD^2)_a (D\gamma), \quad (BD^2)_a (D\alpha), \\
& (CD^2)_a (D\alpha), \quad (CD^2)_a (D\beta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A^2B)_m (\alpha'_{\beta})_{(22)}, (AB^2)_m (\beta'_{\alpha})_{(47)}, (AC^2)_m (\gamma'_{\alpha})_{(29)}, (AD^2)_m (\delta'_{\alpha})_{(37)}, \\
& (A^2C)_m (\alpha'_{\gamma})_{(15)}, (B^2C)_m (\beta'_{\gamma}), (BC^2)_m (\gamma'_{\beta}), (BD^2)_m (\delta'_{\beta}), \\
& (A^2D)_m (\alpha'_{\delta})_{(50)}, (B^2D)_m (\beta'_{\delta}), (C^2D)_m (\gamma'_{\delta}), (CD^2)_m (\delta'_{\gamma}), \\
& (A\beta)_h (A_B)_{(17)}, (B\alpha)_h (B_A), (C\gamma)_h (C_A), (D\alpha)_h (D_A), \\
& (A\gamma)_h (A_C)_{(20)}, (B\gamma)_h (B_C), (C\beta)_h (C_B), (D\beta)_h (D_B), \\
& (A\delta)_h (A_D)_{(14)}, (B\delta)_h (B_D), (C\delta)_h (C_D), (D\gamma)_h (D_C), \\
& (A^2B)_c (\gamma^2\delta)_{(45)}, (AB^2)_c (\gamma^2\delta)_{(26)}, (A^2B)_c (\gamma\delta^2)_{(23)}, (AB^2)_c (\gamma\delta^2)_{(48)}, \\
& (A^2C)_c (\beta^2\delta)_{(31)}, (AC^2)_c (\beta^2\delta)_{(30)}, (A^2C)_c (\beta\delta^2)_{(24)}, (AC^2)_c (\beta\delta^2)_{(28)}, \\
& (A^2D)_c (\beta^2\gamma)_{(39)}, (AD^2)_c (\beta^2\gamma)_{(36)}, (A^2D)_c (\beta\gamma^2)_{(40)}, (AD^2)_c (\beta\gamma^2)_{(38)}, \\
& (B^2C)_c (\alpha^2\delta), (BC^2)_c (\alpha^2\delta), (B^2C)_c (\alpha\delta^2), (BC^2)_c (\alpha\delta^2), \\
& (B^2D)_c (\alpha^2\gamma), (BD^2)_c (\alpha^2\gamma), (B^2D)_c (\alpha\gamma^2), (BD^2)_c (\alpha\gamma^2), \\
& (C^2D)_c (\alpha^2\beta), (CD^2)_c (\alpha^2\beta), (C^2D)_c (\alpha\beta^2), (CD^2)_c (\alpha\beta^2), \\
& (A'_B)_a (\alpha^2\beta), (B'_A)_a (\alpha\beta^2), (C'_A)_a (\alpha\gamma^2), (D'_A)_a (\alpha\delta^2)_{(12)}, \\
& (A'_C)_a (\alpha^2\gamma), (B'_C)_a (\beta^2\gamma)_{(35)}, (C'_B)_a (\beta\gamma^2), (D'_B)_a (\beta\delta^2)_{(11)}, \\
& (A'_D)_a (\alpha^2\delta), (B'_D)_a (\beta^2\delta)_{(32)}, (C'_D)_a (\gamma^2\delta)_{(44)}, (D'_C)_a (\gamma\delta^2)_{(13)}, \\
& (A'_B)_n \alpha_1, (B'_A)_n \beta_1, (C'_A)_n \gamma_1, (D'_A)_n \delta_{1(27)}, \\
& (A'_C)_n \alpha_1, (B'_C)_n \beta_1, (C'_B)_n \gamma_1, (D'_B)_n \delta_{1(26)}, \\
& (A'_D)_n \alpha_1, (B'_D)_n \beta_1, (C'_D)_n \gamma_1, (D'_C)_n \delta_{1(25)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (C\alpha)_a(A'_B), \quad (D\alpha)_a(A'_B), \\
& (D\alpha)_a(A'_C), \quad (B\alpha)_a(A'_C), \\
& (B\alpha)_a(A'_D), \quad (C\alpha)_a(A'_D), \\
& (C\beta)_a(B'_A), \quad (D\beta)_a(B'_A), \\
& (D\beta)_a(B'_C), \quad (A\beta)_a(B'_C)_{(34)}, \\
& (A\beta)_a(B'_D)_{(33)}, \quad (C\beta)_a(B'_D), \\
& (B\gamma)_a(C'_A), \quad (D\gamma)_a(C'_A), \\
& (D\gamma)_a(C'_B), \quad (A\gamma)_a(C'_B)_{(42)}, \\
& (A\gamma)_a(C'_D)_{(43)}, \quad (B\gamma)_a(C'_D), \\
& (B\delta)_a(D'_A), \quad (C\delta)_a(D'_A), \\
& (C\delta)_a(D'_B), \quad (A\delta)_a(D'_B)_{(4)}, \\
& (A\delta)_a(D'_C)_{(3)}, \quad (B\delta)_a(D'_C).
\end{aligned}$$

Diagram VII.

$$\begin{aligned}
& (A_1)_f(\alpha'_\beta)_{(8)}, (A_1)_f(\alpha'_\gamma)_{(7)}, (A_1)_f(\alpha'_\delta)_{(37)}, \\
& (B_1)_f(\beta'_\alpha), (B_1)_f(\beta'_\gamma), (B_1)_f(\beta'_\delta), \\
& (C_1)_f(\gamma'_\alpha), (C_1)_f(\gamma'_\beta), (C_1)_f(\gamma'_\delta), \\
& (D_1)_f(\delta'_\alpha), (D_1)_f(\delta'_\beta), (D_1)_f(\delta'_\gamma), \\
& (\alpha_1)_f(A'_B), (\alpha_1)_f(A'_C), (\alpha_1)_f(A'_D), \\
& (\beta_1)_f(B'_A), (\beta_1)_f(B'_C), (\beta_1)_f(B'_D), \\
& (\gamma_1)_f(C'_A), (\gamma_1)_f(C'_B), (\gamma_1)_f(C'_D), \\
& (\delta_1)_f(D'_A)_{(35)}, (\delta_1)_f(D'_B)_{(12)}, (\delta_1)_f(D'_C)_{(41)}, \\
& (A^2B)_a(\alpha'_\beta)_{(3)}, (A^2C)_a(\alpha'_\gamma), (A^2D)_a(\alpha'_\delta)_{(2)}, \\
& (AB^2)_a(\beta'_\alpha)_{(24)}, (B^2C)_a(\beta'_\gamma), (B^2D)_a(\beta'_\delta), \\
& (AC^2)_a(\gamma'_\alpha)_{(16)}, (BC^2)_a(\gamma'_\beta), (C^2D)_a(\gamma'_\delta), \\
& (AD^2)_a(\delta'_\alpha)_{(22)}, (BD^2)_a(\delta'_\beta), (CD^2)_a(\delta'_\gamma), \\
& (\alpha^2\beta)_a(A'_B), (\alpha^2\gamma)_a(A'_C), (\alpha^2\delta)_a(A'_D), \\
& (\alpha\beta^2)_a(B'_A), (\beta^2\gamma)_a(B'_C)_{(20)}, (\beta^2\delta)_a(B'_D)_{(48)}, \\
& (\alpha\gamma^2)_a(C'_A), (\beta\gamma^2)_a(C'_B)_{(24)}, (\gamma^2\delta)_a(C'_D)_{(26)}, \\
& (\alpha\delta^2)_a(D'_A), (\beta\delta^2)_a(D'_B)_{(5)}, (\gamma\delta^2)_a(D'_C)_{(4)},
\end{aligned}$$

$$(A\beta)_{(49)}, (A\gamma)_{(25)}, (A\delta)_{(36)}, (B\alpha), (B\gamma), (B\delta)_{(13)}, \\ (C\alpha), (C\beta), (C\delta)_{(14)}, (D\alpha), (D\beta), (D\gamma).$$

The following lines are all bisected

$$(\overset{2}{A}B)(\overset{2}{\gamma}\overset{2}{\delta})_{(33)}, (\overset{2}{A}C)(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\delta})_{(30)}, (\overset{2}{A}D)(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\gamma})_{(34)}, \\ (\overset{2}{A}B)(\overset{2}{\gamma}\overset{2}{\delta})_{(34)}, (\overset{2}{A}C)(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\delta})_{(10)}, (\overset{2}{A}D)(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\gamma})_{(32)}, \\ (\overset{2}{B}C)(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\delta}), (\overset{2}{B}D)(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\gamma}), (\overset{2}{C}D)(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\beta}), \\ (\overset{2}{B}C)(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\delta}), (\overset{2}{B}D)(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\gamma}), (\overset{2}{C}D)(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\beta}), \\ (\overset{2}{AB})(\overset{2}{\gamma}\overset{2}{\delta})_{(27)}, (\overset{2}{AC})(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\delta})_{(17)}, (\overset{2}{AD})(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\gamma})_{(21)}, \\ (\overset{2}{AB})(\overset{2}{\gamma}\overset{2}{\delta})_{(29)}, (\overset{2}{AC})(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\delta})_{(15)}, (\overset{2}{AD})(\overset{2}{\beta}\overset{2}{\gamma})_{(23)}, \\ (\overset{2}{BC})(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\delta}), (\overset{2}{BD})(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\gamma}), (\overset{2}{CD})(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\beta}), \\ (\overset{2}{BC})(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\delta}), (\overset{2}{BD})(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\gamma}), (\overset{2}{CD})(\overset{2}{\alpha}\overset{2}{\beta}).$$

(6 February 1900).

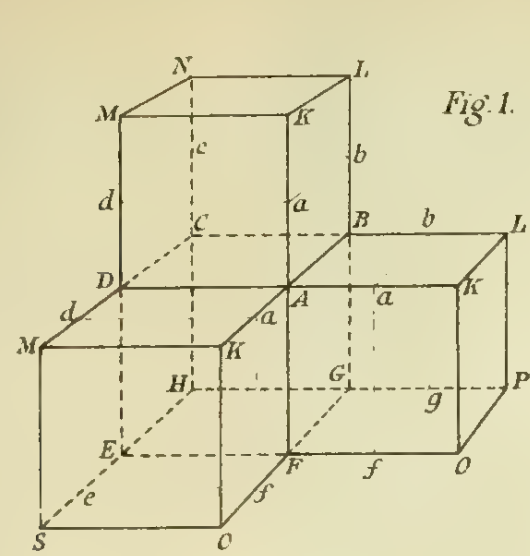


Fig. 1.

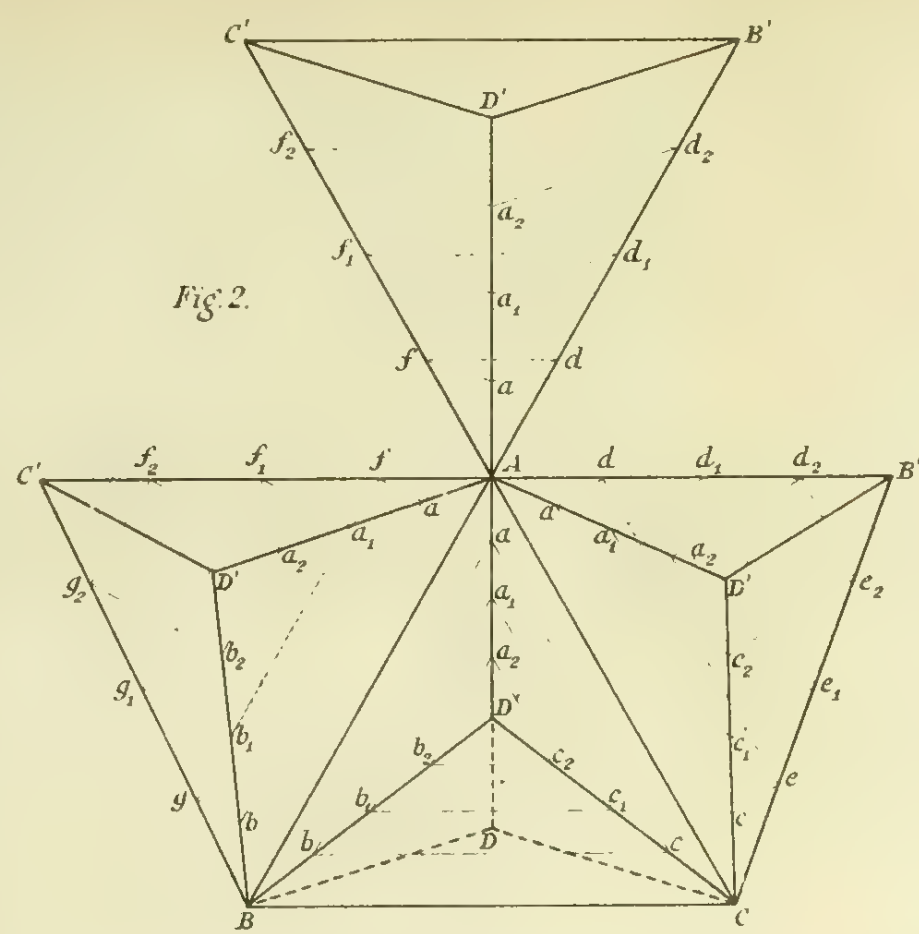


Fig. 2.

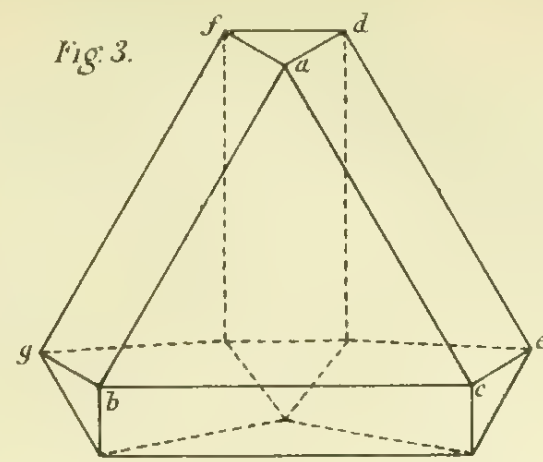


Fig. 3.

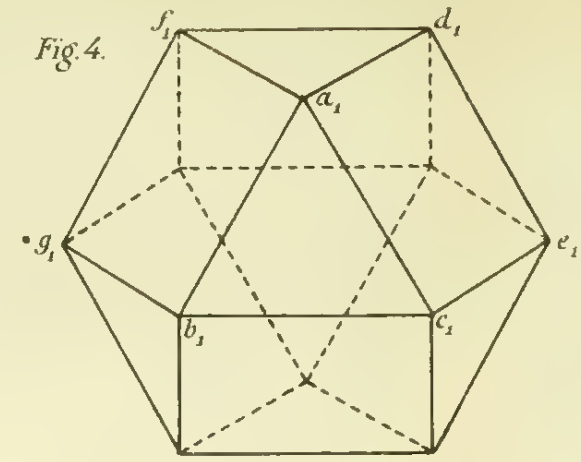


Fig. 4.

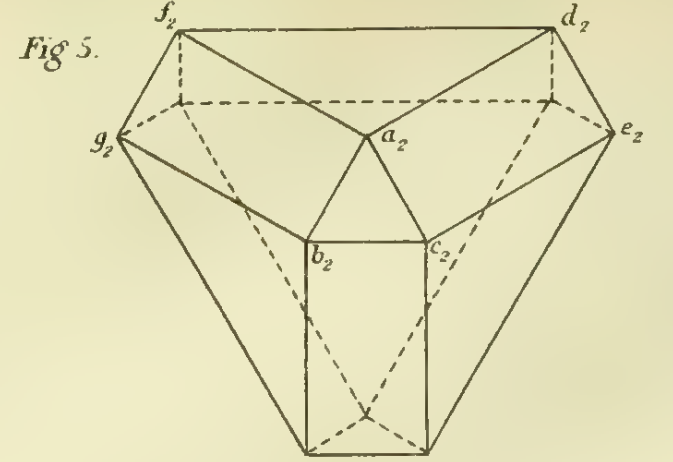


Fig. 5.

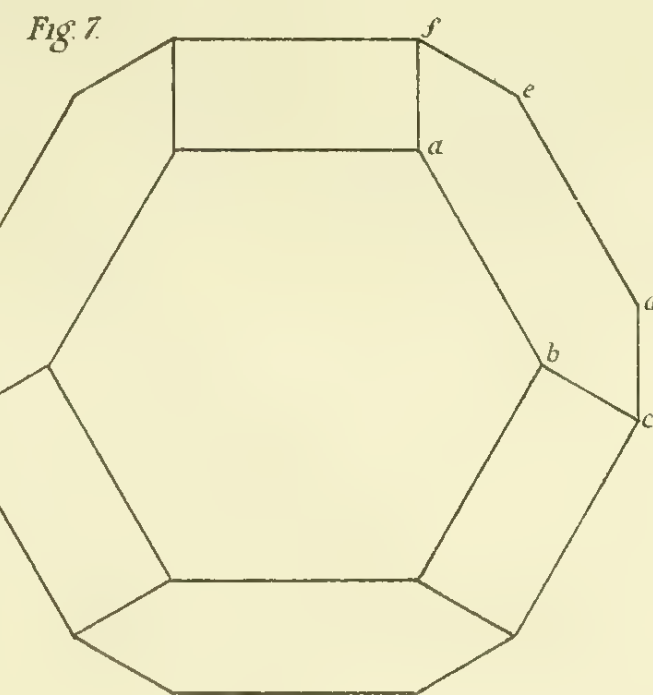


Fig. 7.

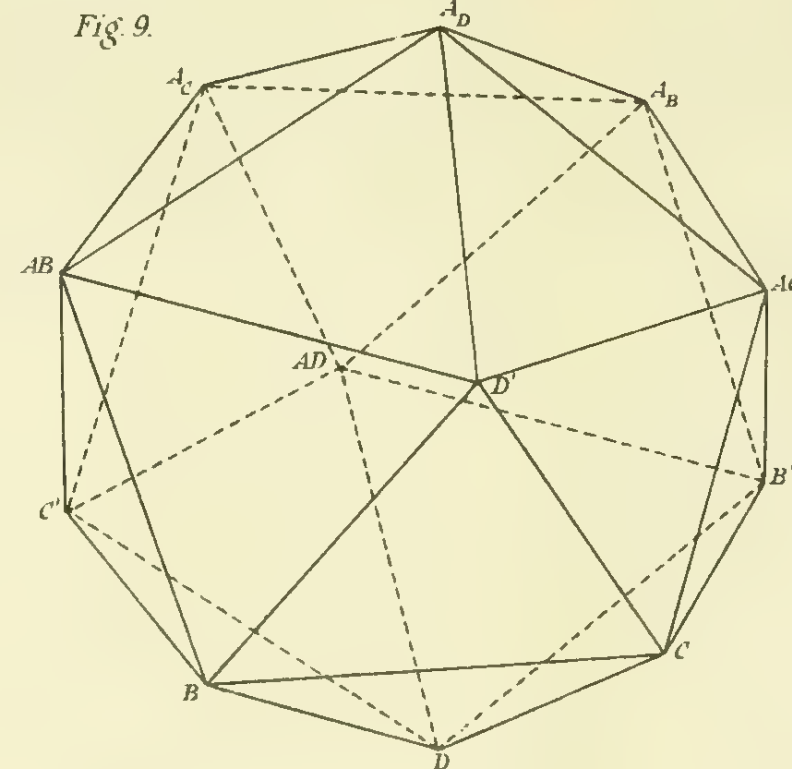


Fig. 9.

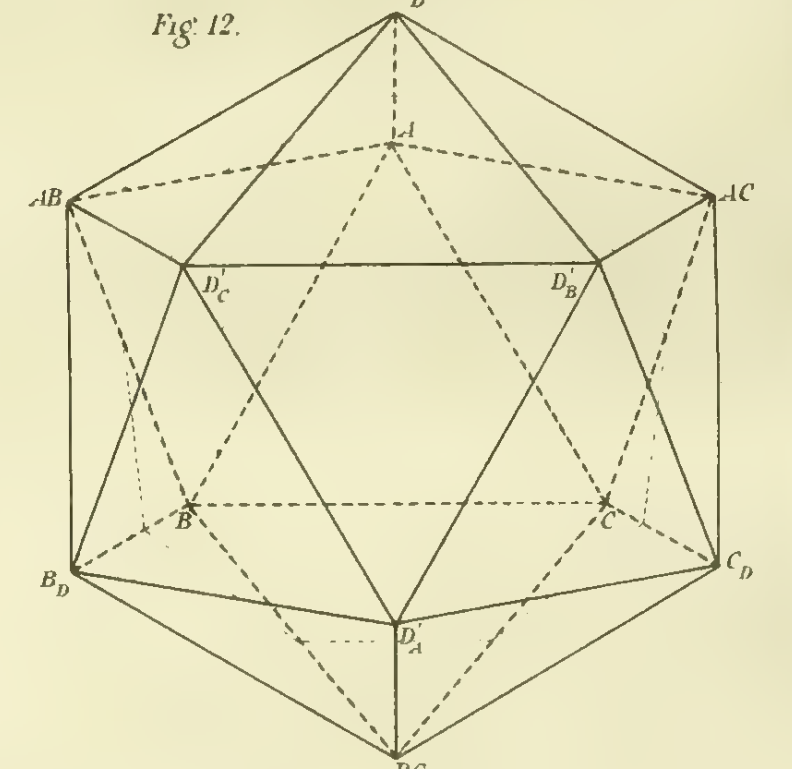


Fig. 12.

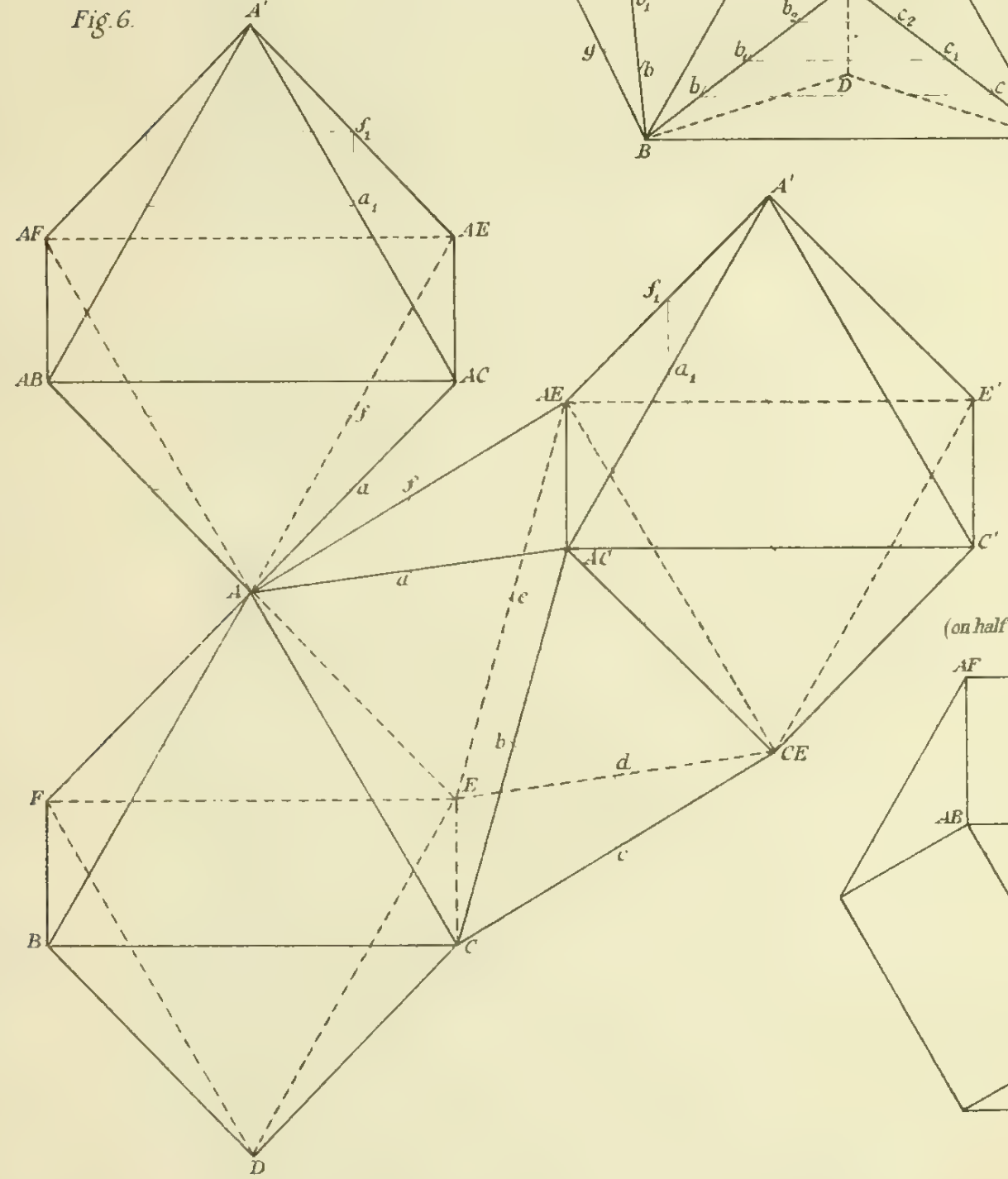


Fig. 6.

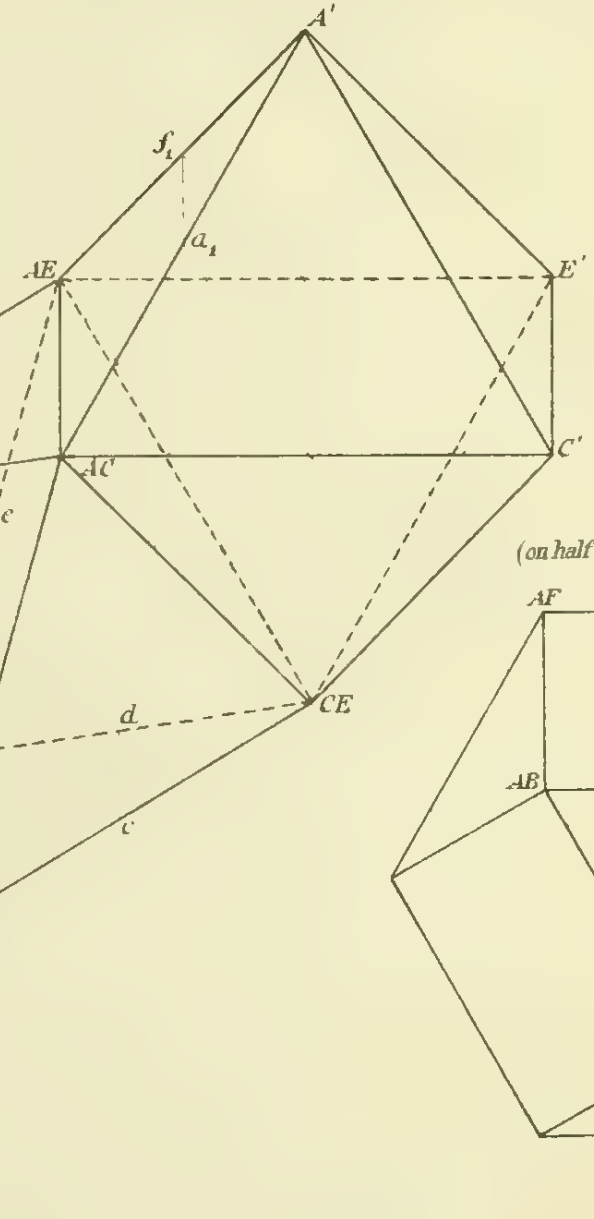


Fig. 8.

(on half the scale of Fig. 6 and 7)

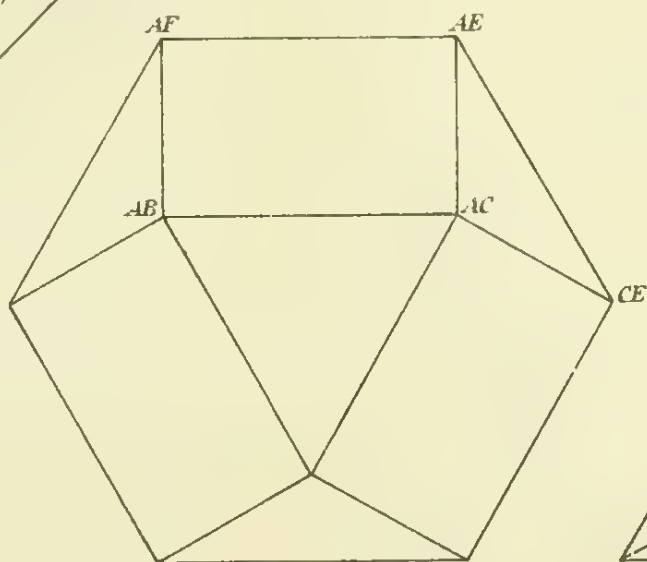


Fig. 10.

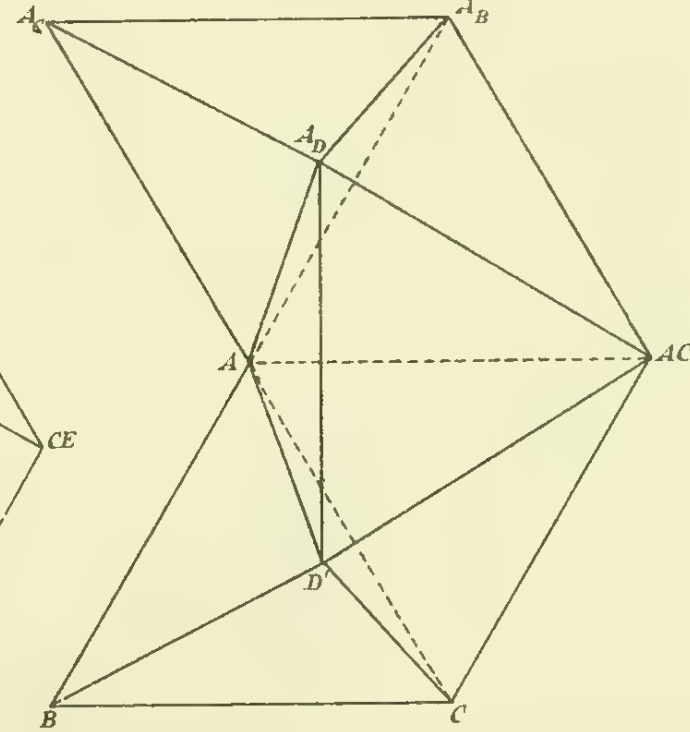


Fig. 11.

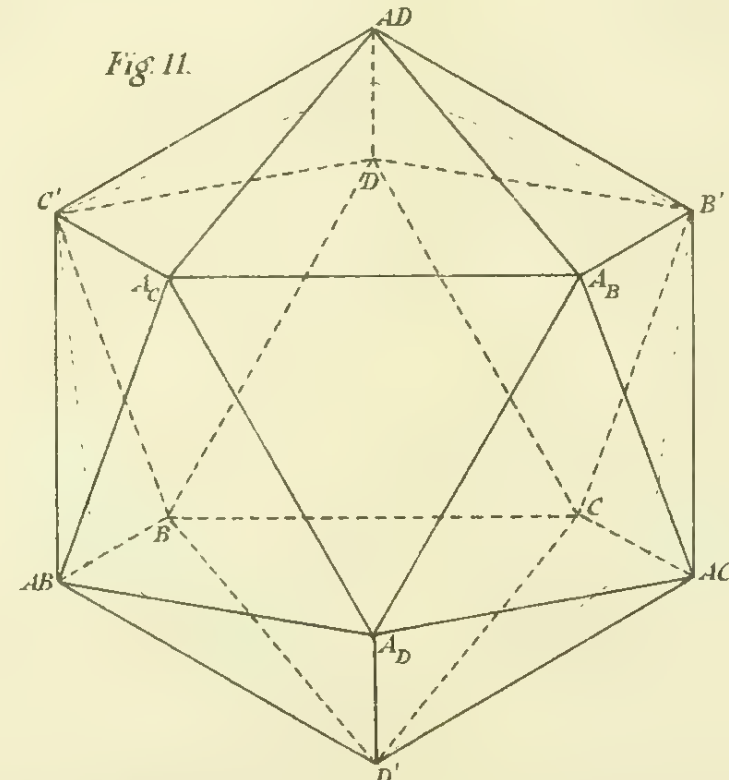
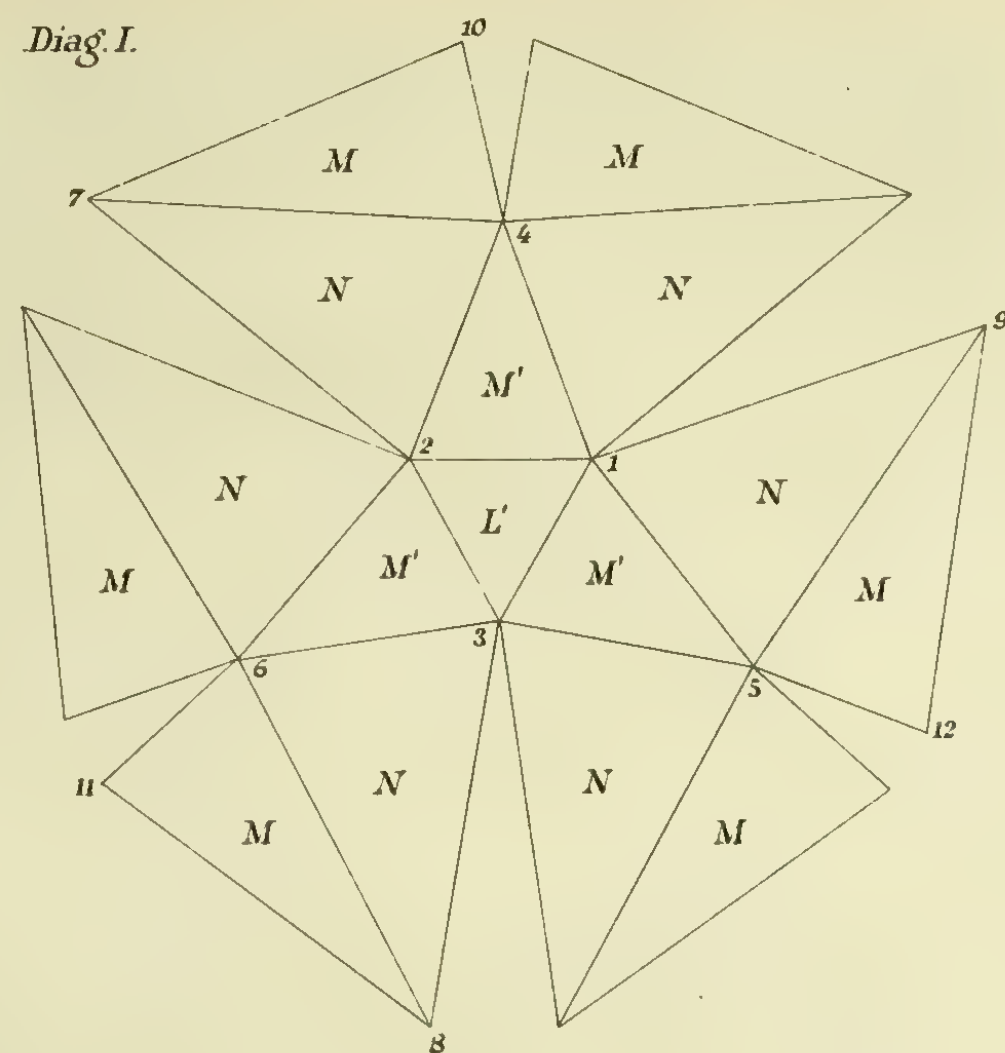
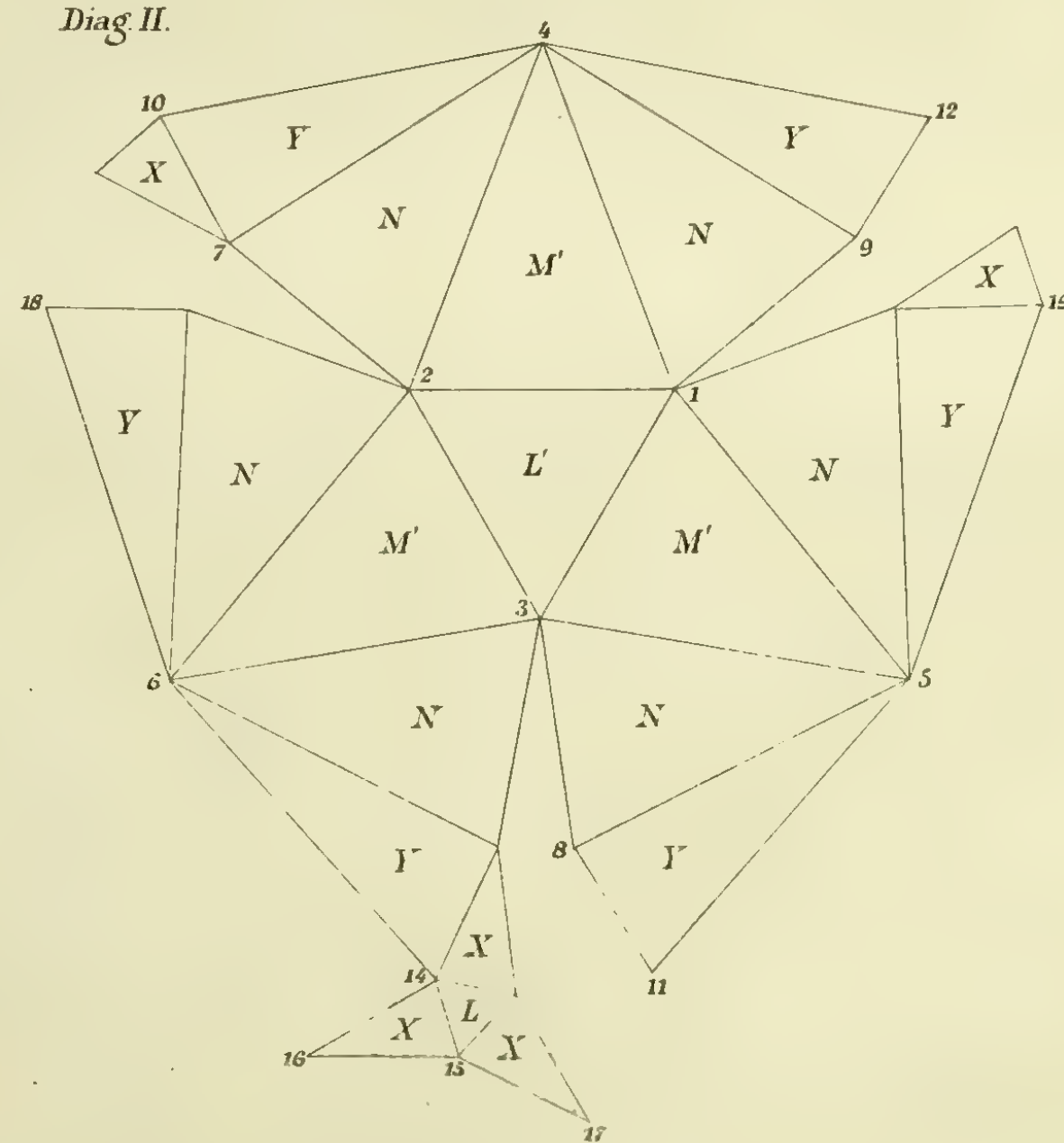


Fig. 13.

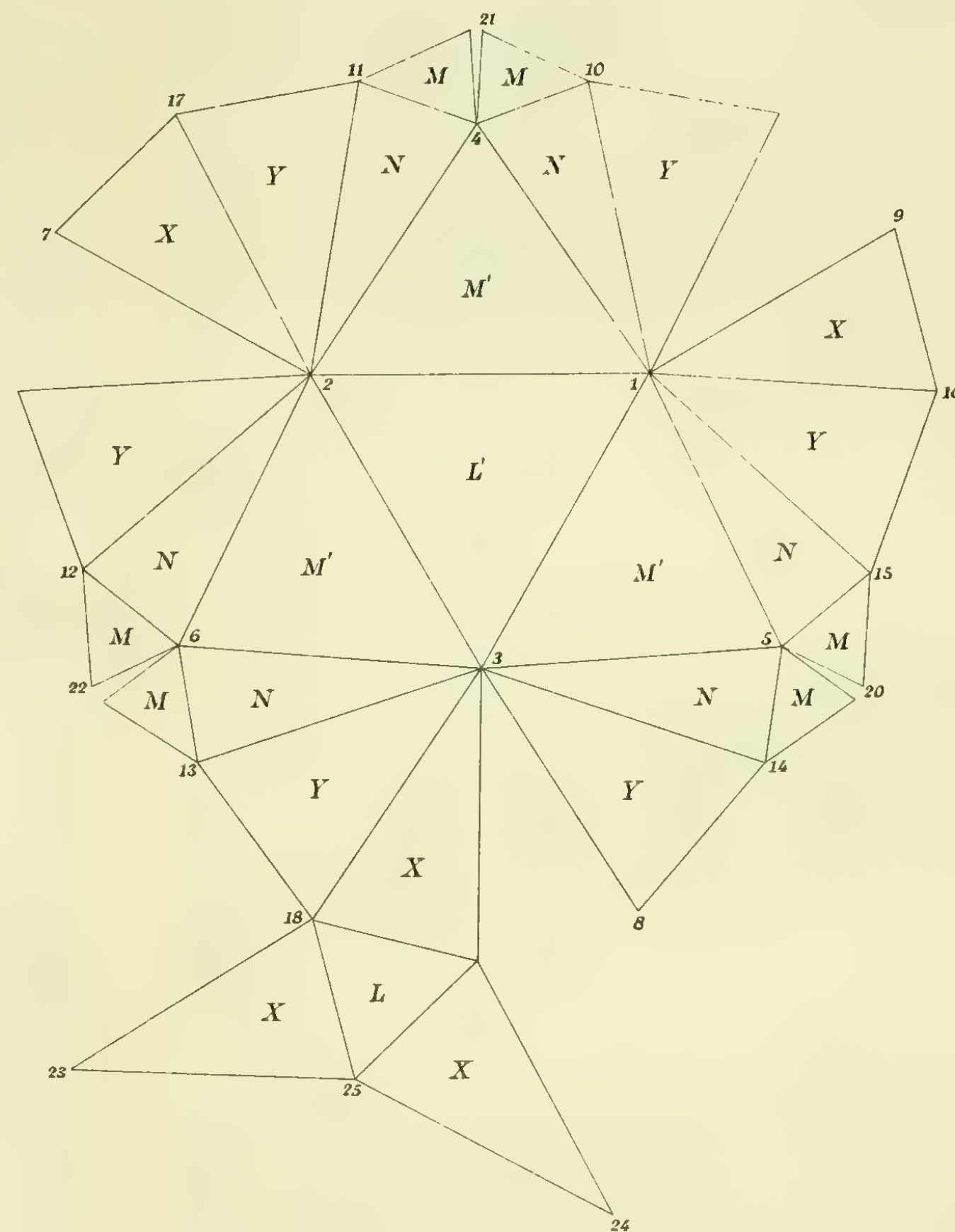
Diag. I.



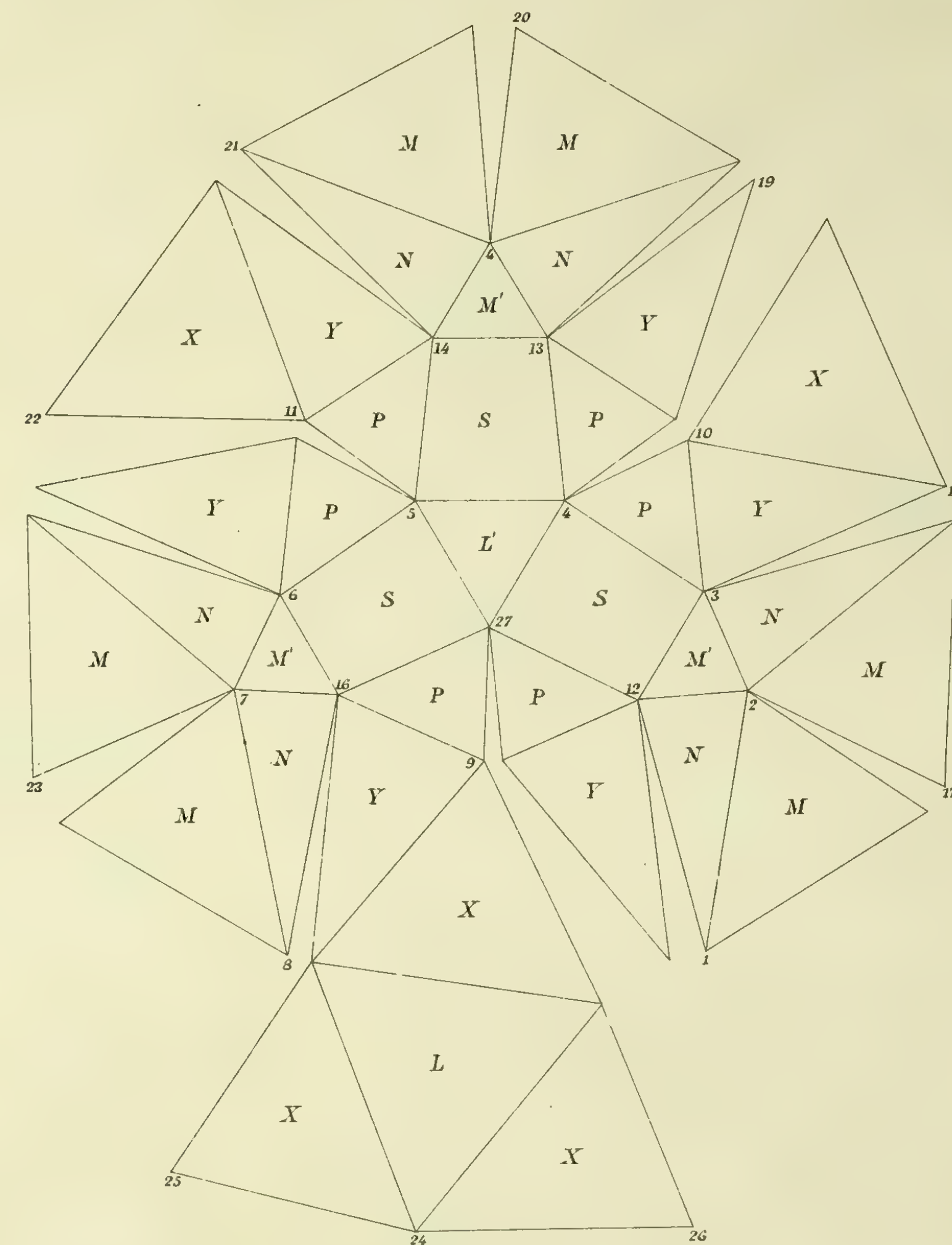
Diag. II.

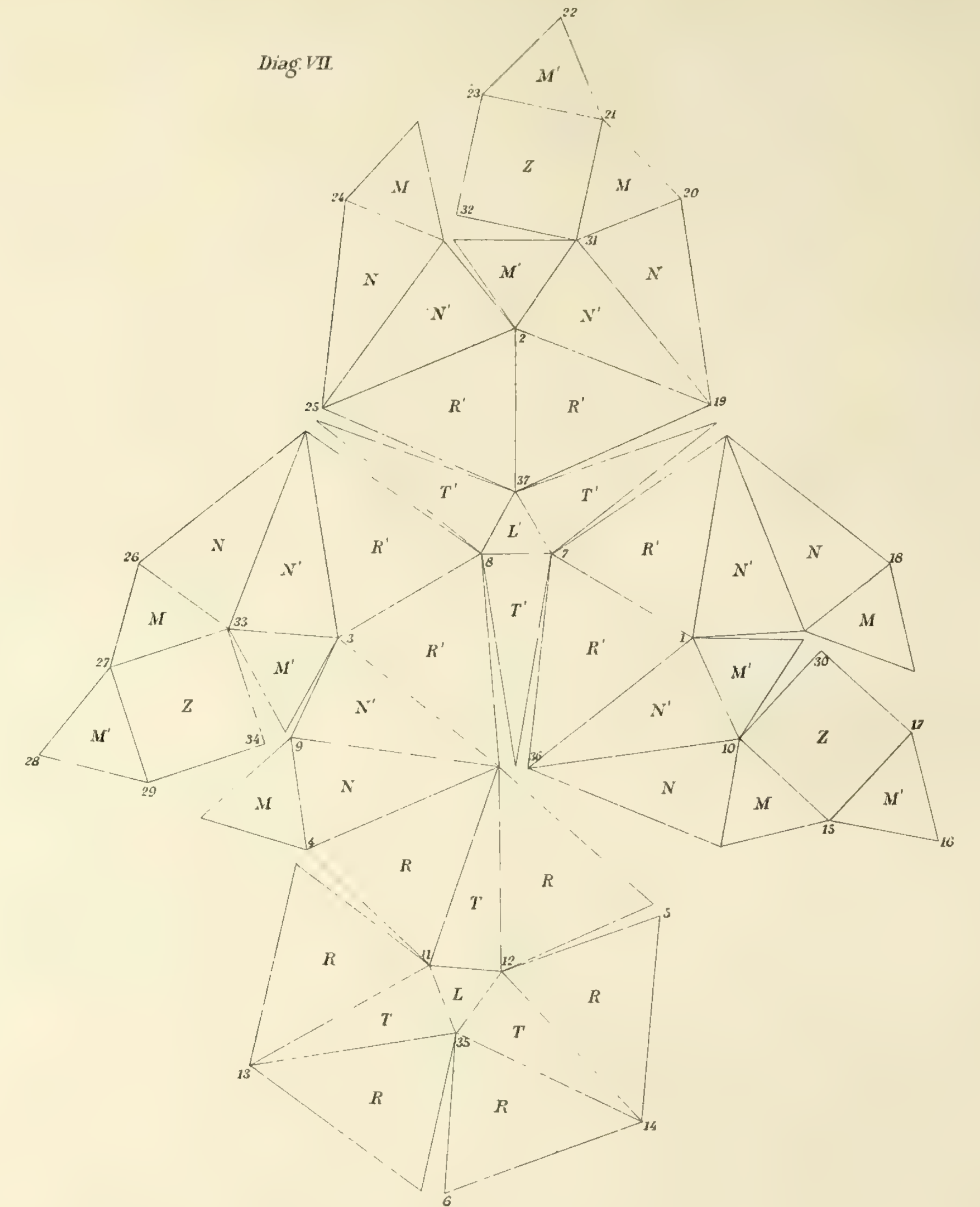
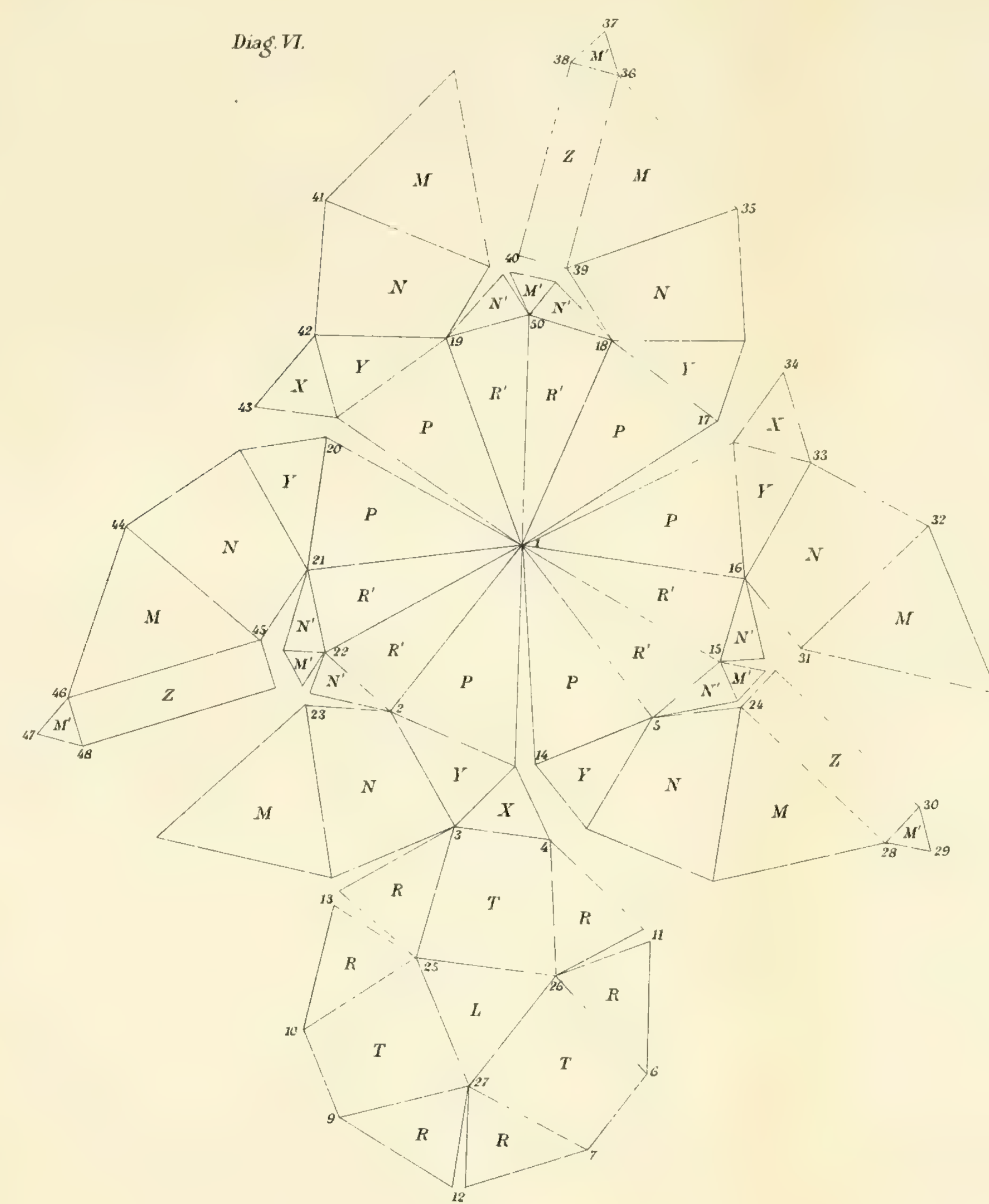
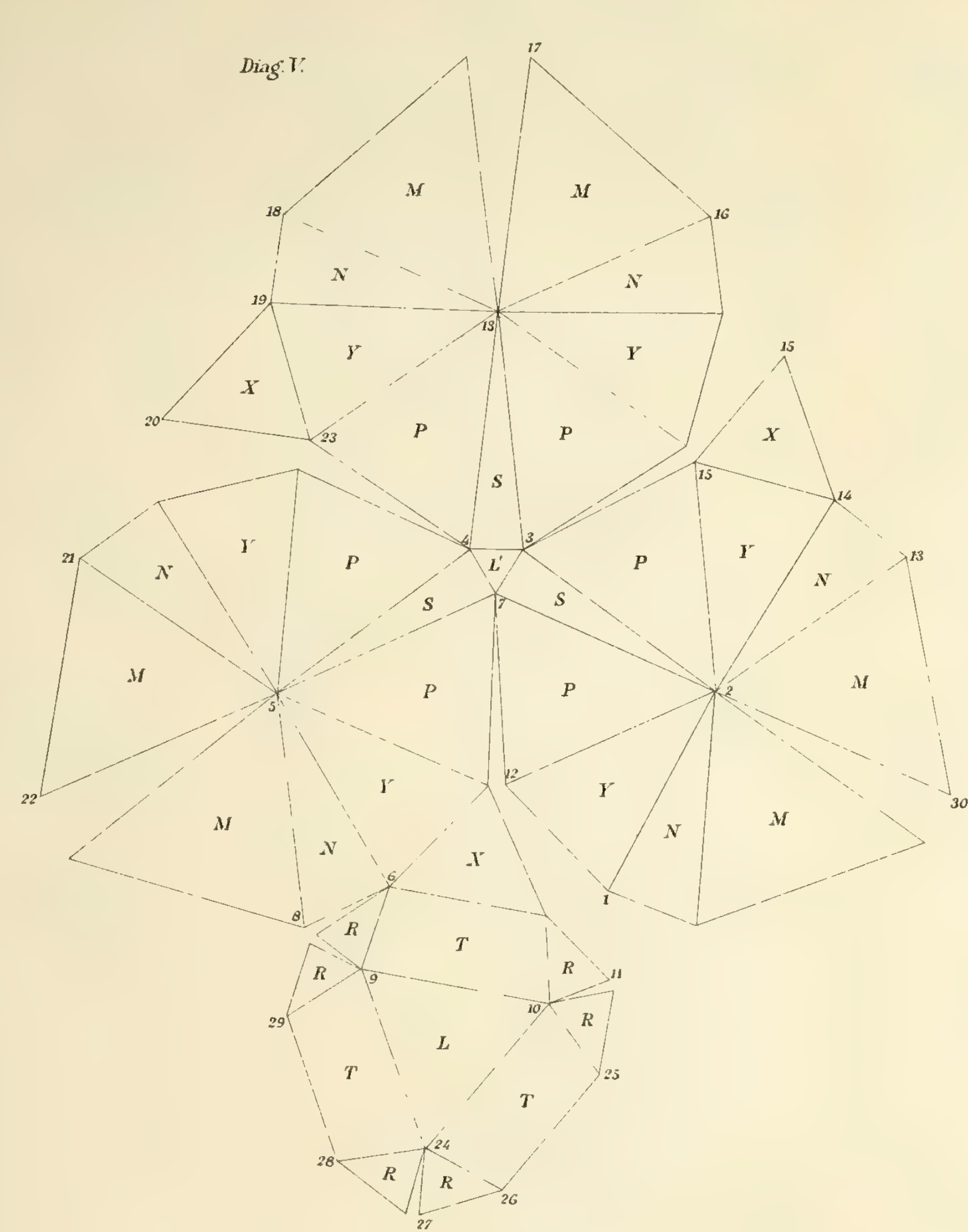


Diag. III.

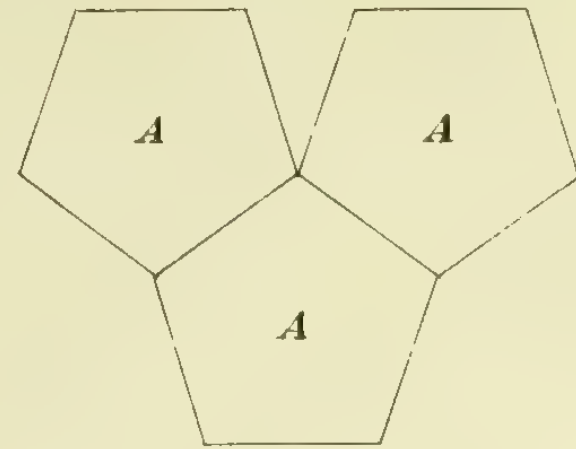


Diag. IV.

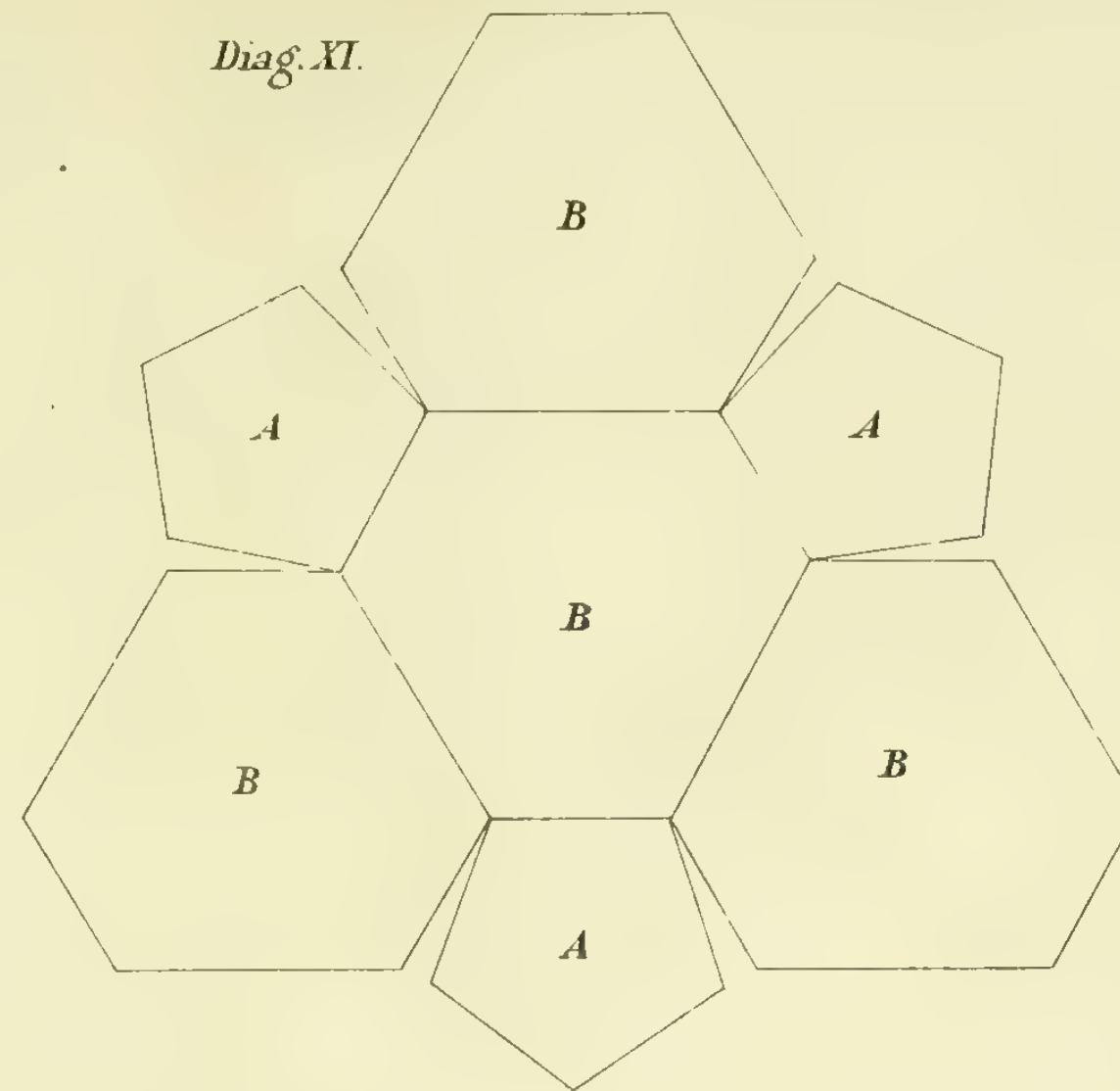




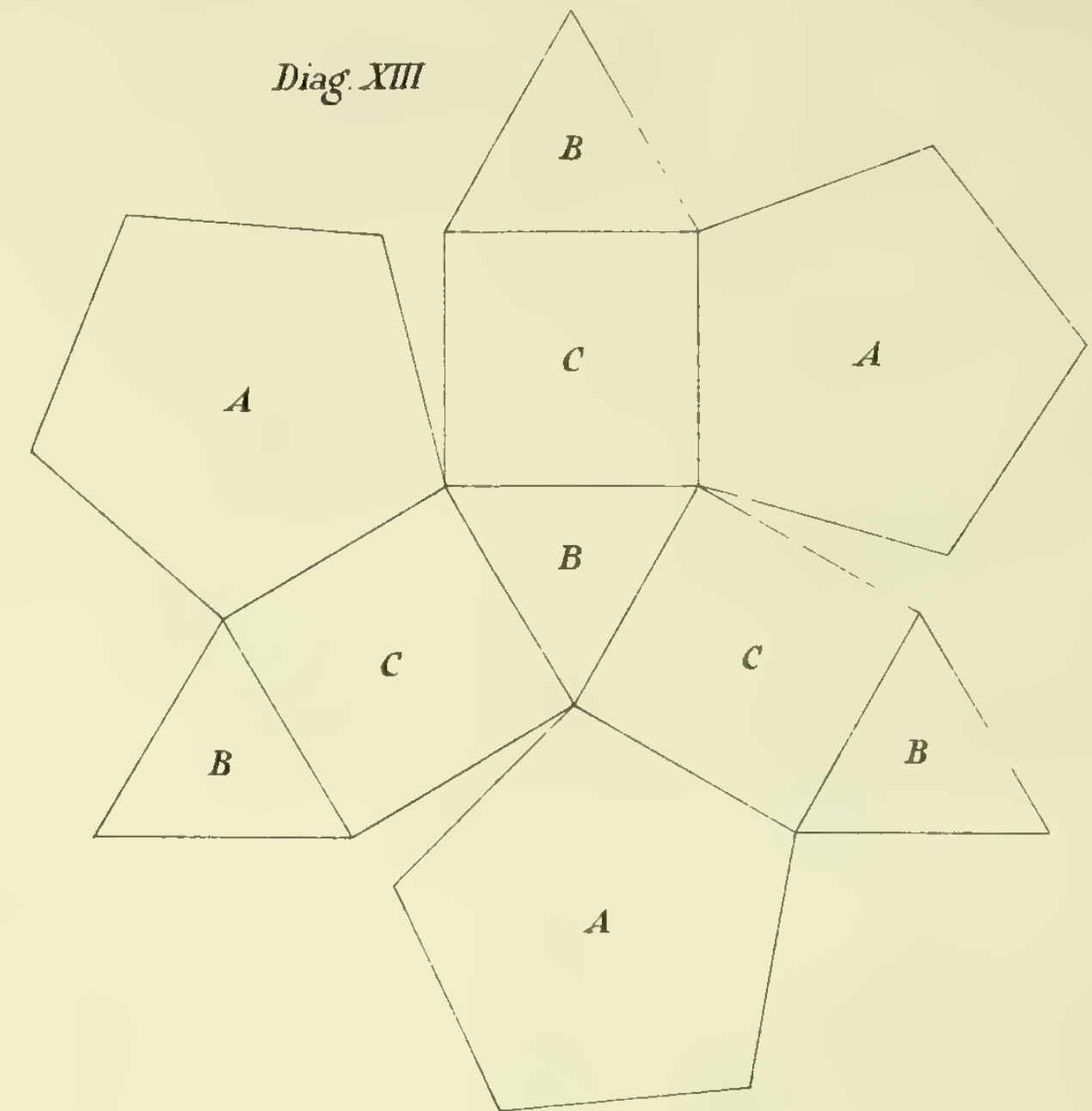
Diag.VIII.



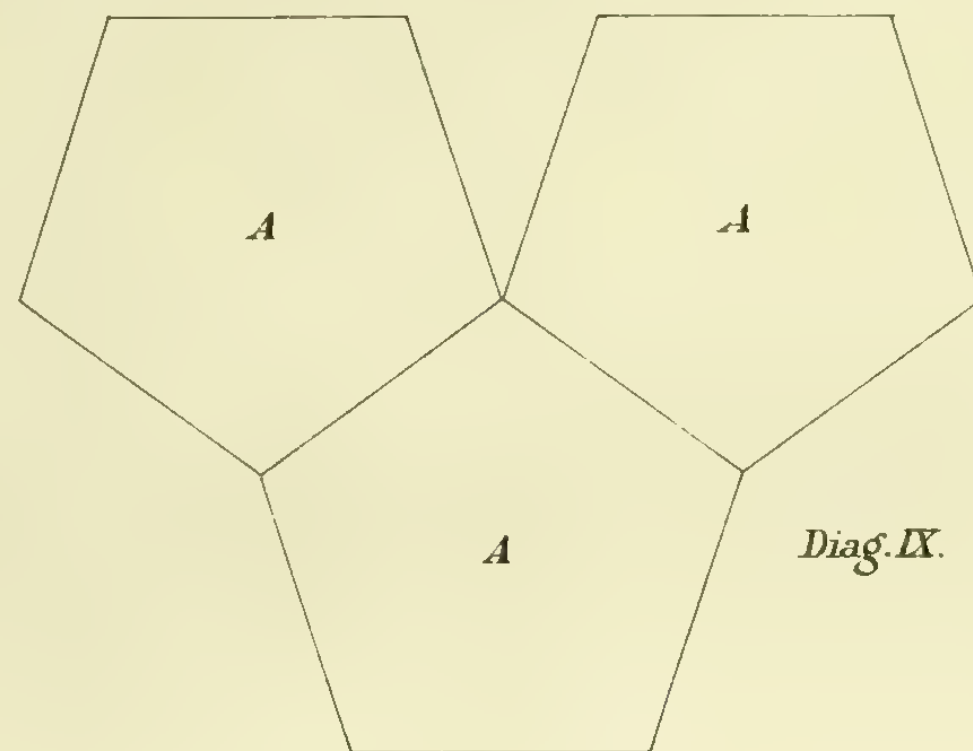
Diag. XI.



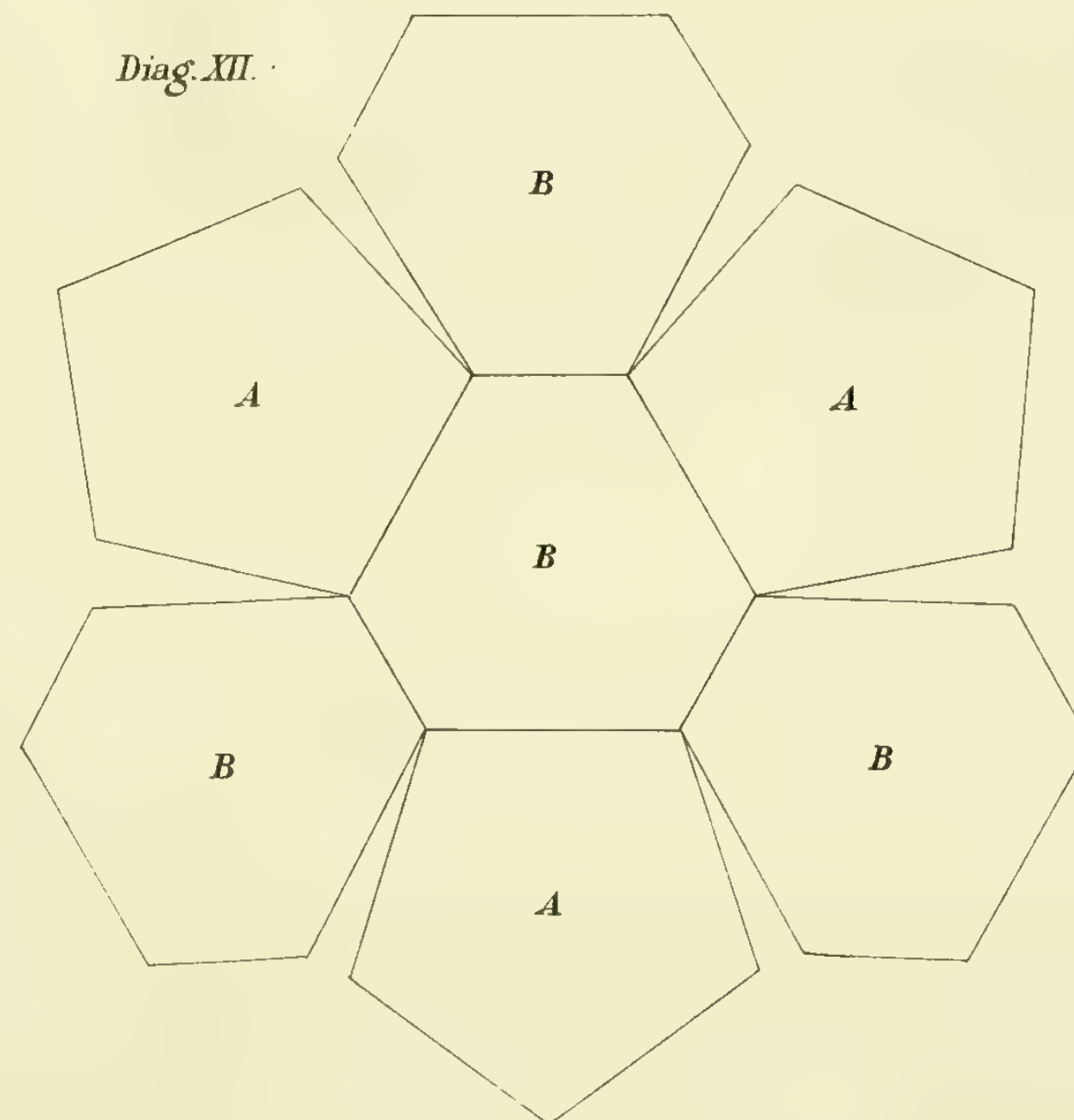
Diag. XIII



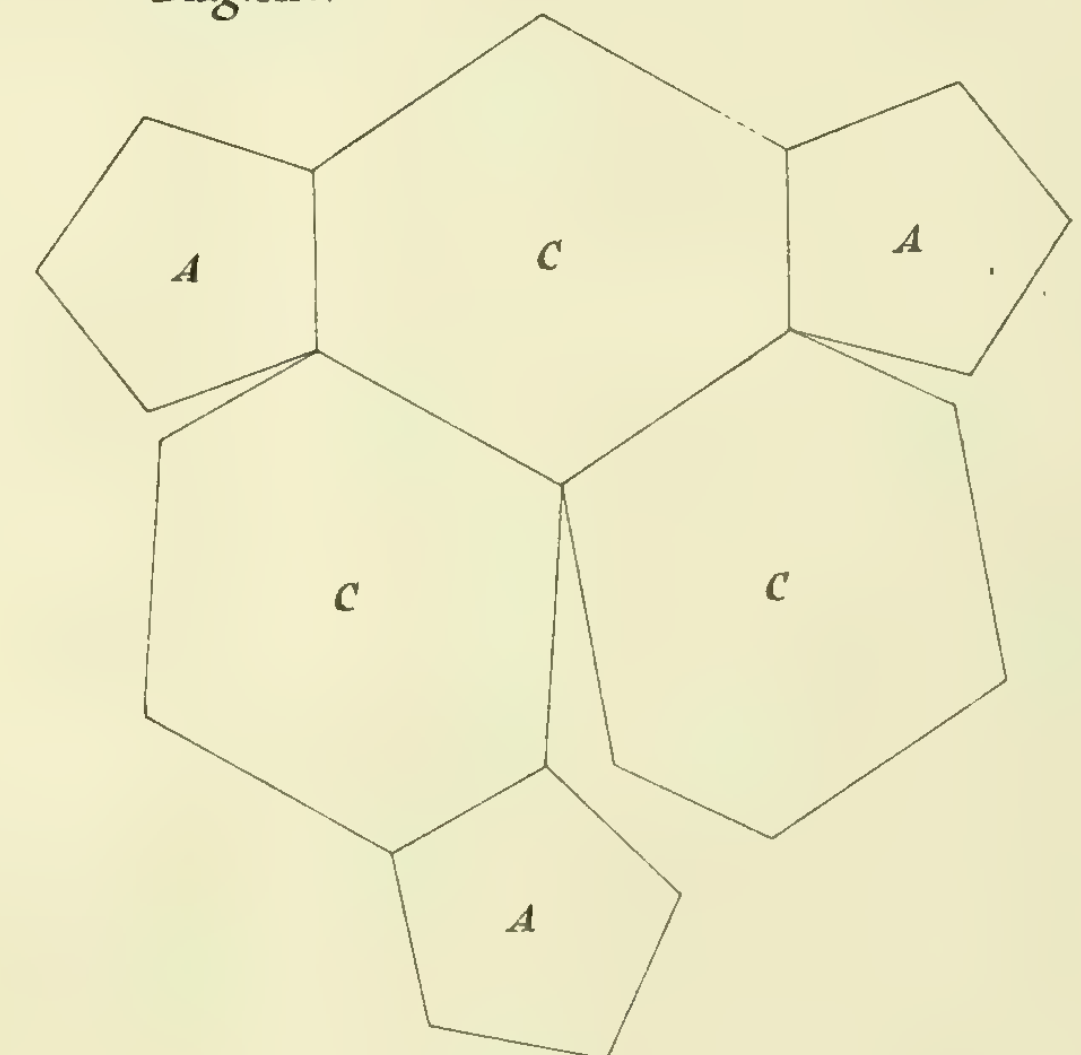
Diag. IX.



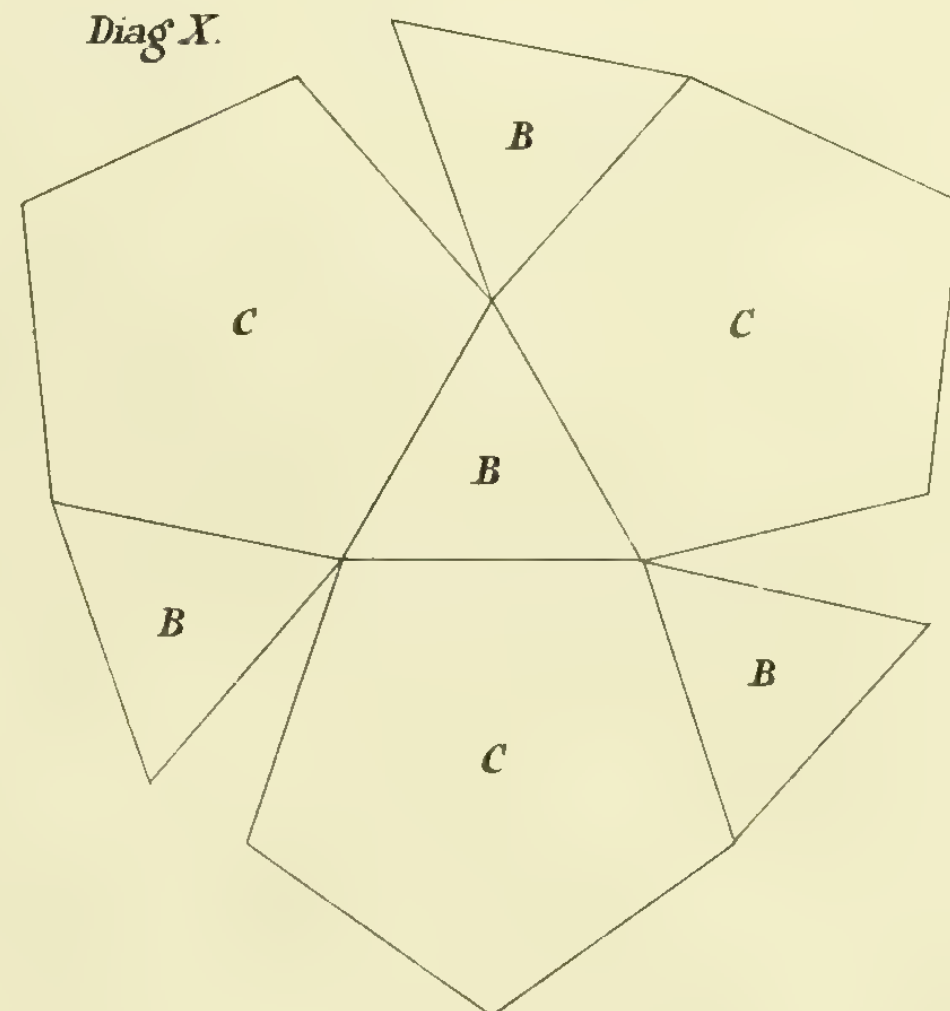
Diag. XII.



Diag. XIV.



Diag. X.





Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions.

(Étude de géométrie énumérative)

PAR

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N^o. 4.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Juni 1900.

Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions.

(Étude de géométrie énumérative)

PAR

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N^o. 4.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

1900.

Les hyperquadriques dans l'espace à quatre dimensions.

(ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE)

PAR

P. H. SCHOUTE.

Dans un travail paru en 1894 dans le tome 45 des *Mathematische Annalen* M. H. SCHUBERT a développé dans toute généralité les formules qui font connaître en un espace E_n à n dimensions les nombres des espaces courbes du second ordre à p dimensions satisfaisant à $n(p+2) - \frac{1}{2}p(p+1)$ conditions simples. En parcourant ce travail on ne sait pas ce qu'il faut y admirer le plus, ou bien la conception ingénieuse de la théorie ou bien l'assiduité démontrée dans l'application de cette théorie au cas $n=4$, $p=3$. En effet, le mémoire se termine par un tableau de plusieurs pages contenant les 344 nombres des hyperquadriques en E_4 satisfaisant à quatorze conditions simples, tandis que l'évaluation du nombre pris pour exemple donnée in extenso (pp. 197 et 198) exige à elle seule environ une heure.

Par rapport à la géométrie énumérative des hyperquadriques en E_n le mémoire cité du géomètre éminent de Hambourg forme le couronnement de l'édifice dont CHASLES, M. H. G. ZEUTHEN et M. SCHUBERT lui-même ont posé les fondements. Dans son œuvre trop peu connue „Kalkül der abzählenden Geometrie” (Leipzig, Teubner, 1879) le dernier a déjà codifié les lois générales de cette nouvelle géométrie et en développé l'application la plus complète, celle aux nombres de quadriques satisfaisant à neuf conditions simples (comparez aussi le mémoire de 1870 dans le tome 71 du *Journal de Crelle*). Mais il y a encore une grande distance entre cette œuvre magistrale de 1879 et le mémoire de 1894, parce

que dans le dernier le nombre indéfini n des dimensions de l'espace E_n qui porte les figures étudiées, et le nombre indéfini p des dimensions de ces figures entrent dans les résultats. On saisira la portée considérable de ce progrès par l'exemple suivant donné par SCHUBERT lui-même. On sait que dans un plan donné ($n = 2$) il y a une conique qui touche cinq droites données, que dans un espace tridimensionnel donné ($n = 3$) il y a quatre coniques qui touchent huit plans donnés, que dans un espace quadridimensionnel donné ($n = 4$) il y a vingt coniques qui touchent onze espaces donnés et que le terme suivant de cette série de coniques est cent douze. Mais la loi générale, d'après laquelle un E_n donné contient un nombre $\frac{2^{n-1}(2n-3)!}{n!(n-2)!}$ de coniques qui touchent $3n-1$ espaces

E_{n-1} donnés en cet E_n , ne peut pas encore être devinée même, si l'on ne sait que les nombres 1, 4, 20, 112 de coniques correspondant aux valeurs successives 2, 3, 4, 5 de n . Et en ce cas il n'y a qu'une inconnue n en jeu, tandis que les formules de SCHUBERT en contiennent deux, n et p .

Quoique la géométrie énumérative des êtres du second ordre en E_n est donc depuis six années une théorie tant soit peu achevée, nous nous proposons de déduire dans les pages suivantes d'une manière directe les nombres en rapport avec les hyperquadriques à eux seuls. Si l'on désire se borner au cas $n = 4$, cette déduction a bien des avantages sur celle basée sur les considérations beaucoup plus difficiles du cas général d'un n quelconque. Notamment elle est plus simple pour deux raisons. Seulement une de ces raisons est manifeste dans l'exemple cité: la peine de la déduction du nombre 20 des coniques en E_4 disparaît en comparaison de celle qui mène à la formule générale du nombre de coniques correspondant à un n quelconque. Mais dans le cas des formules de M. SCHUBERT une seconde raison s'y joint: la peine de l'évaluation du nombre correspondant à des valeurs données de n et p après la substitution de ces valeurs dans les formules. En vérité, ces formules donnent les nombres en question en forme d'une somme d'un grand nombre de produits, ce qui emporte deux désavantages quand il s'agit d'un cas particulier $n = 4$. D'abord la réduction de la somme au nombre cherché est un travail assez ennuyeux; mais ce qui est plus grave, c'est qu'on obtient les nombres cherchés sans indice d'une relation mutuelle, ce qui implique que chacun de ces nombres exige une évaluation. Au contraire, en suivant en E_4 le chemin correspondant à celui que M. SCHUBERT a frayé en E_3 dans son œuvre de 1879, on obtient les nom

bres cherchés dans leur dépendance mutuelle, ce qui abrège considérablement le travail.

Les instruments dont nous nous servirons dans ce qui suit, se réduisent à deux principes fondamentaux, le principe de correspondance de CHASLES dans sa forme la plus simple et le principe de la conservation du nombre. Pour faciliter la lecture de notre étude nous donnons ici l'énoncé de ces deux principes qui forment, en effet, la base de toute la géométrie énumérative.

Le principe de correspondance de CHASLES dit: „S'il existe une „correspondance (m, n) entre deux éléments a et b faisant partie d'une „même série simplement infinie d'éléments, de manière que dans „cette série il correspond un nombre m d'éléments déterminés a à un „élément b donné et un nombre n d'éléments déterminés b à un „élément a donné, il arrive $m + n$ fois que deux éléments correspondants a et b coïncident.” Dans la forme algébrique suivante on en intervoit immédiatement la démonstration: „Si les variables x et y „dépendent l'une de l'autre à l'aide d'une équation $f(x, y) = 0$, où „ $f(x, y)$ est un polynôme de l'ordre m en x et de l'ordre n en y , il „y a $m + n$ couples de valeurs correspondantes x, y , où $x = y$.”

Le principe de la conservation du nombre peut être formulé de la manière suivante: „Si un nombre infini d'ordre de multiplicité „ p ($p = 0, 1, 2$, etc.) dépendant de quelques figures données conserve „son ordre d'infinité p , quand on varie d'une manière déterminée „les rapports mutuels de position de ces figures, ce nombre ne „change pas du tout.” Ordinairement on en fait ressortir la signification par l'exemple très connu des deux transversales communes de quatre droites en E_3 qui se croisent, où $p = 0$; si l'on remplace ces quatre droites par deux couples de droites qui se coupent, on trouve encore deux transversales communes, la jonction des deux points d'intersection de ces couples et l'intersection de leurs plans. En dernière analyse la démonstration de ce principe extrêmement fertile repose sur la possibilité de passer de la position originale des figures données à toute autre position par une succession de déplacements et de déformations infiniment petits.

La rédaction de ce travail nous a servi nous-même comme sujet d'étude de la géométrie énumérative; nous le publions dans l'espoir d'éveiller l'envie de se familiariser avec les belles recherches de M. SCHUBERT, sans lesquelles — nous l'avouons volontiers — il nous aurait été impossible d'atteindre le but proposé ¹⁾.

¹⁾ Il est singulier qu'une traduction française du travail principal de M. SCHUBERT ou bien la publication d'un travail analogue français se fait encore attendre.

1. Notations de la symbolique.

Par préférence nous représentons par a un point, par b une droite, par c un plan, par d un espace. De plus nous nous imaginons que ces symboles indiquent en même temps une condition simple imposée à la figure correspondante et le nombre de ces figures satisfaisant à cette condition. Ainsi, s'il s'agit des points d'une droite donnée, a indique que le point considéré se trouve en un espace donné et l'équation $a = 1$ exprime qu'il y a toujours un point qui satisfait à cette condition. De la même manière b, c, d indiquent successivement qu'une droite considérée coupe un plan donné, qu'un plan considéré coupe une droite donnée et qu'un espace considéré passe par un point donné. Ces quatre conditions sont en E_4 les seules conditions simples de position qu'on peut imposer aux quatre figures élémentaires: point, droite, plan et espace.

Les conditions multiples de position relative s'expriment à l'aide des lettres a, b, c, d munies d'un indice. Ainsi le symbole a_c impose au point considéré la condition double de se trouver dans un plan donné; l'identité $a^2 = a_c$ exprime que tous les points qui se trouvent à la fois en deux espaces donnés, sont situés en même temps dans un plan donné, le plan d'intersection de ces deux espaces.

Par des majuscules nous désignons des éléments donnés; ainsi A désigne un point donné, etc.

Voici le système complet des symboles avec les conditions qu'ils représentent:

a	point d'un D ,
a_b	„ „ B ,
a_c	„ „ C .
b	droite s'appuyant sur un C ,
b_a	„ par un A ,
b_b	„ s'appuyant sur un B ,
b_c	„ d'un C ,
b_d	„ „ D ,
b_s	„ „ C , par un A en C ,
b_n	„ „ D , „ „ „ „ D ,
b_e	„ „ D , s'appuyant sur un B de D .
c	plan s'appuyant sur un B ,
c_a	„ par un A ,
c_b	„ „ „ B ,
c_c	„ situé dans un même espace avec un C ,

c_d	plan d'un D ,
c_s	„ par un B , contenu dans un D par B ,
c_n	„ „ „ A , „ „ „ D „ A ,
c_e	„ „ „ A , „ „ „ même espace avec un C par A .
d	espace par un A ,
d_b	„ „ „ B ,
d_c	„ „ „ C .

2. Relations entre les symboles.

Le tableau suivant classifie les symboles indiqués d'après le nombre des conditions simples qu'ils représentent :

1	$a, b, c, d,$
2	$a_c, b_b, b_d, c_a, c_e, d_b,$
3	$a_b, b_a, b_e, c_d, c_e, d_c,$
4	$A, b_c, b_n, c_b, c_n, D,$
5	$b_s, c_s,$
6	$B, C.$

Entre ces symboles, leurs produits et leurs puissances il existe un grand nombre de relations. Pour le point et l'espace ces relations ne sont que des identités bien simples; en effet nous avons :

Pour le *point*

1	$a,$
2	$a_c \equiv a^2,$
3	$a_b \equiv aa_c \equiv a^3,$
4	$A \equiv a_c^2 \equiv aa_b \equiv a^2 a_c \equiv a^4.$

Pour l'*espace*

1	$d,$
2	$d_b \equiv d^2,$
3	$d_c \equiv dd_b \equiv d^3,$
4	$D \equiv d_b^2 \equiv dd_c \equiv d^2 d_b \equiv d^4.$

Dans les cas de la droite et du plan nous avons à distinguer entre *identité* et *égalité*. La relation $b_d^2 \equiv b_c$ est une identité; car chaque droite qui se trouve à la fois en deux espaces donnés, se trouve de même dans un plan donné, le plan d'intersection de ces deux espaces. Au contraire les trois relations $b^2 = b_b + b_d$, $bb_b = b_a + b_e$, $b_b^2 = b_c + b_n$ sont des égalités qui exigent une démonstration; on les obtient en appliquant d'une manière convenable le

principe de la conservation du nombre. En supposant que les deux plans de la condition double b^2 se trouvent dans un même espace, le nombre quadruplement infini des droites satisfaisant à cette condition se divise en deux classes distinctes de la même multiplicité d'infinité, celle des droites qui s'appuient sur l'intersection des deux plans sans qu'il soit nécessaire qu'elles se trouvent dans l'espace de ces plans, et celle des droites qui se trouvent dans l'espace de ces plans sans qu'il soit nécessaire qu'elles en coupent l'intersection. Encore, en supposant que le plan et la droite de la condition triple bb_b fassent partie d'un même espace, le nombre triplement infini des droites qui satisfont à cette condition, se décompose en deux catégories distinctes d'infinité triple, celle des droites qui passent par le point d'intersection des deux éléments donnés sans qu'il soit nécessaire qu'elles se trouvent dans l'espace de ces éléments, et celle des droites qui coupent la droite donnée et le plan donné en deux points différents. Et enfin, en supposant que les deux droites de la condition quadruple b_b^2 se coupent, on trouve de la même manière la dernière des équations mentionnées.

A l'aide des trois égalités fondamentales que nous venons de démontrer, et de plusieurs identités évidentes on dresse sans peine le tableau des relations entre les conditions à imposer à une droite. Pour faciliter ce procès nous énumérons d'abord les différents symboles b et leurs combinaisons, classifiés d'après le nombre des conditions simples auxquelles ils équivalent.

1	b	
2	b_b, b_d	b^2 .
3	b_a, b_e	$bb_b, bb_d; \quad b^3$.
4	b_c, b_n	$b_b^2, b_b b_d, b_d^2; \quad bb_a, bb_e; \quad b^2 b_b, b^2 b_d; \quad b^4$.
5	b_s	$b_a b_b, b_a b_d, b_b b_e, b_d b_e; \quad bb_c, bb_n, bb_b^2, bb_b b_d, bb_d^2; \quad b^2 b_a, b^2 b_e;$ $b^3 b_b, b^3 b_d; \quad b^5$.
6	B	$b_b b_c, b_b b_n, b_c b_d, b_d b_n, b_a^2, b_a b_e, b_e^2, b_b^3, b_b^2 b_d, b_b b_d^2, b_d^3; \quad bb_s,$ $bb_a b_b, bb_a b_d, bb_b b_e, bb_d b_e; \quad b^2 b_c, b^2 b_n, b^2 b_b^2, b^2 b_b b_d, b^2 b_d^2;$ $b^3 b_a, b^3 b_e; \quad b^4 b_b, b^4 b_d; \quad b^5$.

On aperçoit que nous avons distingué les symboles en symboles *primaires* b, b_b, b_d , etc. et symboles *composés* b^2, bb_b , etc. Comme le montre le tableau suivant les symboles composés sont des combinaisons linéaires des symboles primaires de même portée; nous les classifions d'après la puissance de b .

Droite

- 1 b .
- 2 $b^2 = b_b + b_d$.
- 3 $bb_b = b_a + b_e, bb_d = b_e; \quad b^3 = b(b_b + b_d) = b_a + 2b_e$.
- 4 $b_b^2 = b_c + b_n, b_b b_d = b_n, b_d^2 = b_e; \quad bb_a = b_n, bb_e = b_b^2 = b_c + b_n;$
 $b^2 b_b = (b_b + b_d) b_b = b_c + 2b_n, b^2 b_d = (b_b + b_d) b_d = b_c + b_n; \quad b^4 =$
 $(b_b + b_d)^2 = 2b_c + 3b_n$.
- 5 $b_a b_b = b_s, b_d b_d = 0, b_b b_c = b_s, b_d b_c = b_s; \quad bb_c = b_s, bb_n = b_s, bb_b^2 =$
 $b(b_c + b_n) = 2b_s, bb_b b_d = bb_n = b_s, bb_d^2 = bb_c = b_s; \quad b^2 b_n = (b_b + b_d) b_n =$
 $b_s, b^2 b_c = (b_b + b_d) b_c = 2b_s; \quad b^3 b_b = (b_a + 2b_c) b_b = 3b_s, b^3 b_d =$
 $(b_a + 2b_e) b_d = 2b_s; \quad b^5 = (2b_c + 3b_n) b = 5b_s$.
- 6 $b_b b_c = 0, b_b b_n = B, b_c b_d = B, b_d b_n = 0, b_a^2 = B, b_a b_e = 0, b_e^2 = B,$
 $b_b^3 = B, b_b^2 b_d = B, b_b b_d^2 = 0, b_d^3 = B; \quad bb_s = B, bb_a b_b = B, bb_a b_d = 0,$
 $bb_b b_e = B, bb_a b_e = B; \quad b^2 b_c = (b_b + b_d) b_c = B, b^2 b_n = (b_b + b_d) b_n = B,$
 $b^2 b_b^2 = (b_b + b_d) b_b^2 = 2B, b^2 b_b b_d = (b_b + b_d) b_b b_d = B, b^2 b_d^2 =$
 $(b_b + b_d) b_d^2 = B; \quad b^3 b_a = (b_a + 2b_e) b_a = B, b^3 b_e = (b_a + 2b_c) b_e =$
 $2B; \quad b^4 b_b = (2b_c + 3b_n) b_b = 3B, b^4 b_d = (2b_c + 3b_n) b_d = 2B;$
 $b^6 = (b_b + b_d)^3 = 5B$.

A l'aide des considérations corrélatives on trouve d'abord le tableau suivant des relations entre les conditions à imposer à un plan.

- 1 c
- 2 $c_a, c_c \quad c^2$
- 3 $c_d, c_e \quad cc_a, cc_c; \quad c^3$

4	c_b, c_n	$c_a^2, c_a c_c, c_c^2; \dots cc_d, cc_e; \dots c^2 c_a, c^2 c_c; \dots c^4.$
5	c_s	$c_a c_d, c_a c_e, c_c c_d, c_c c_e; \dots cc_b, cc_n, cc_a^2, cc_a c_c, cc_c^2; \dots c^2 c_d, c^2 c_e; c^3 c_a, c^3 c_c; \dots c^5.$
6	C	$c_a c_b, c_a c_n, c_b c_c, c_c c_n, c_d^2, c_d c_e, c_e^2, c_a^3, c_a^2 c_c, c_a c_c^2, c_c^3; \dots cc_s, cc_a c_d, cc_a c_e, cc_c c_d, cc_c c_e; \dots c^2 c_b, c^2 c_n, c^2 c_a^2, c^2 c_a c_c, c^2 c_c^2; \dots c^3 c_d, c^3 c_e; c^4 c_a, c^4 c_c; \dots c^6.$

Ensuite on obtient le tableau suivant indiquant comment les symboles composés s'expriment à l'aide des symboles primaires.

Plan

1	$c.$
2	$c^2 = c_a + c_c.$
3	$cc_a \equiv c_e, cc_c \equiv c_d + c_e; \dots c^3 = c(c_a + c_c) = c_d + 2c_e.$
4	$c_a^2 \equiv c_b, c_a c_c \equiv c_n, c_c^2 = c_b + c_n; \dots cc_d \equiv c_n, cc_e \equiv c_c^2 = c_b + c_n; c^2 c_a = (c_a + c_c) c_a = c_b + c_n, c^2 c_c = (c_a + c_c) c_c = c_b + 2c_n; \dots c^4 = (c_a + c_c)^2 = 2c_b + 3c_n.$
5	$c_a c_d \equiv 0, c_a c_e \equiv c_s, c_c c_d \equiv c_s, c_c c_e \equiv c_s; \dots cc_b \equiv c_s, cc_n \equiv c_s, cc_a^2 = cc_b = c_s, cc_a c_c = cc_n = c_s, cc_c^2 = c(c_b + c_n) = 2c_s; \dots c^2 c_d = (c_a + c_c) c_d = c_s, c^2 c_e = (c_a + c_c) c_e = 2c_s; \dots c^3 c_a = (c_d + 2c_e) c_a = 2c_s, c^3 c_c = (c_d + 2c_e) c_c = 3c_s; \dots c^5 = (2c_b + 3c_n) c = 5c_s.$
6	$c_a c_b \equiv C, c_a c_n \equiv 0, c_b c_c \equiv 0, c_c c_n \equiv C, c_d^2 = C, c_d c_e \equiv 0, c_e^2 \equiv C, c_a^3 \equiv C, c_a^2 c_c \equiv 0, c_a c_c^2 \equiv C, c_c^3 \equiv C; \dots cc_s \equiv C, cc_a c_d \equiv 0, cc_a c_e \equiv C, cc_c c_d \equiv C, cc_c c_e \equiv C; \dots c^2 c_b = (c_a + c_c) c_b = C, c^2 c_n = (c_a + c_c) c_n = C, c^2 c_a^2 = (c_a + c_c) c_a^2 = C, c^2 c_a c_c = (c_a + c_c) c_a c_c = C, c^2 c_c^2 = (c_a + c_c) c_c^2 = 2C; \dots c^3 c_d = (c_d + 2c_e) c_d = C, c^3 c_e = (c_d + 2c_e) c_e = 2C; \dots c^4 c_a = (2c_b + 3c_n) c_a = 2C, c^4 c_c = (2c_b + 3c_n) c_c = 3C; \dots c^6 = (c_a + c_c)^3 = 5C.$

A la plume courante nous insistons encore sur quelques uns des résultats que nous venons de déduire.

On a $b_a b_d \equiv 0$ et $b_a b_e \equiv 0$. Car en général le point donné A de la condition b_a ne se trouve pas dans l'espace donné D de la condition b_d ou b_e .

On a $b_b b_a^2 \equiv b_b b_c \equiv 0$. Car en général la droite donnée B de la condition b_b ne se trouve pas dans le plan donné C de la condition b_c .

On a $b_a b_n \equiv 0$. Car en général l'espace donné D de la condition b_a ne passe pas par le point donné A commun aux droites qui satisfont à la condition b_n .

Enfin on a $b_b^3 \equiv B$. Car la droite qui rencontre trois droites données, est en même temps l'intersection des trois espaces déterminés par ces droites prises deux à deux.

Il va sans dire qu'on déduit les résultats corrélatifs $c_a c_d \equiv 0$, $c_a c_n \equiv 0$, $c_a^2 c_c \equiv c_b c_c \equiv 0$, $c_d c_e \equiv 0$ et $c_c^3 \equiv C$ d'une manière complètement analogue.

3. Lieux géométriques en rapport avec les résultats trouvés.

L'énumération de tous les lieux géométriques en rapport avec les relations déduites équivaut à peu près à l'extension complète de la géométrie de position, comme M. TH. REYE l'a perfectionnée, à l'espace à quatre dimensions et tombe donc hors du cadre de ce travail. Tout ce que nous nous proposons ici c'est d'effleurer légèrement les lieux géométriques les plus simples en rapport avec les équations $b^2 b_b^2 = 2B$, $b^3 b_e = 2B$, $b^4 b_a = 2B$, $b^4 b_b = 3B$, $b^6 = 5B$ et les équations corrélatives, lieux géométriques que l'on obtient en omettant une ou plusieurs des conditions qui entrent dans le premier membre de ces équations. Mais avant d'y procéder il faut que nous intercalions une couple de remarques.

D'abord dans l'espace E_3 à trois dimensions une courbe du second ordre est plane, à moins qu'elle ne dégénère en deux droites qui se croisent; car le plan mené par trois points pris au hasard sur cette courbe la coupe en un nombre de points surpassant l'ordre de la courbe, ce qui implique que ce plan contient la courbe entière, si elle est simple. Un raisonnement tout à fait analogue démontre qu'en E_4 toute courbe simple du second ordre est plane, toute courbe simple du troisième ordre se trouve en un E_3 et — ce qui nous intéresse ici — qu'en E_4 toute surface du second ordre se trouve dans un E_3 , à moins qu'elle ne consiste de deux plans à un seul point commun. En effet, si A_1 , A_2 , A_3 , A_4 sont quatre points quelconques non coplanaires d'une surface du second ordre, le plan C par A_1 , A_2 , A_3 coupe cette surface en un nombre de points non collinéaires surpassant l'ordre de la surface et en contient donc une infinité située sur une conique par A_1 , A_2 , A_3 ; ce qui implique que l'espace E_3 par A_1 , A_2 , A_3 , A_4 coupe

la surface suivant cette conique et un point, et en contient donc une infinité double de points, etc. Ainsi l'ordre des surfaces qui ne se trouvent pas en un E_3 , disons l'ordre des surfaces tordues, surpasse deux.

Ensuite, le coefficient de B dans le second membre de l'équation dont on déduit les lieux en question, représente toujours l'ordre du lieu, s'il s'agit d'une infinité de droites formant une surface. Mais, en général cela n'est plus le cas, si le lieu est un espace courbe. Ce point s'éclaircira suffisamment par les exemples que nous rencontrerons tout à l'heure. Qu'il suffise ici d'observer que l'espace courbe qui est le lieu des droites satisfaisant à l'ensemble des conditions b^2b_b que l'on déduit de l'équation $b^2b_b^2 = 2B$ en omettant une des conditions b_b , et de l'équation $b'b_b = 3B$ en omettant deux des conditions b , ne saurait être à la fois de l'ordre deux et trois.

Si le lieu des droites satisfaisant à l'ensemble de conditions p admet q dimensions comme lieu de points, nous le représentons par le symbole $(p)_q$. Seulement pour $q < 4$ ce lieu sera un lieu proprement dit. Pour $q = 4$ il passe un nombre fini des droites du lieu par un point quelconque, pour $q = 5$ ou $q = 6$ les droites par un point quelconque forment une surface ou un espace courbe. Ici nous nous bornons aux cas $q < 4$.

$$\alpha) \dots b^2b_b^2 = 2B.$$

En omettant successivement une des conditions b , les deux conditions b ou une des conditions b_b , nous formons les lieux $(bb_b^2)_2$, $(b_b^2)_3$, $(b^2b_b)_3$; nous les examinons l'un après l'autre.

L'équation $b^2b_b^2 = 2B$ nous apprend que le lieu $(bb_b^2)_2$ rencontre un plan quelconque en deux points. Donc $(bb_b^2)_2$ est une surface du second ordre; d'après la première des deux remarques précédentes elle doit se trouver en un E_3 . Et, en effet, chaque droite qui s'appuie sur les deux droites données B_1, B_2 des deux conditions b_b , se trouve dans l'espace D déterminé par B_1, B_2 ; elle s'appuie donc en même temps sur l'intersection B_3 de cet espace et du plan C de la condition b ; de manière que le lieu $(bb_b^2)_2$ en D est le système réglé (B_1, B_2, B_3) dont B_1, B_2, B_3 sont trois directrices.

Le lieu $(b_b^2)_3$ forme dans l'espace D déterminé par les deux droites B_1, B_2 des deux conditions b_b la congruence la plus simple, c'est-à-dire la congruence (1,1) aux axes B_1, B_2 , et n'est donc plus un lieu proprement dit.

Enfin le lieu $(b^2b_b)_3$ est en vérité un espace courbe du second ordre. Car, si C_1, C_2, B, A_x représentent respectivement les deux plans des conditions b , la droite de la condition b_b et un point variable de cette droite, le plan d'intersection des espaces $(A_x C_1), (A_x C_2)$ porte un faisceau de rayons au sommet A_x dont tous les éléments satisfont aux conditions posées; ainsi le lieu de ces droites est en même temps le lieu du plan d'intersection des espaces correspondants $(A_x C_1), (A_x C_2)$ de deux faisceaux d'espaces qui sont en rapport projectif l'un avec l'autre, parce qu'ils sont en rapport perspectif avec la ponctuelle (A_x) des points A_x de B . Cet espace courbe $(b^2b_b)_3$ possède donc la propriété particulière de contenir une infinité simple de plans.

$$\beta) \dots b^3b_e = 2B.$$

On obtient les deux lieux $(b^2b_e)_2$ et $(bb_e)_3$ en omettant successivement une ou deux des trois conditions b .

Le lieu $(b^2b_e)_2$ est le système réglé (B_1, B_2, B_3) aux directrices B_1, B_2, B_3 , quand ici B_1 est la droite de la condition b_e , tandis que B_2 et B_3 sont les intersections de l'espace D de b_e avec les plans C des deux conditions b .

Le lieu $(bb_e)_3$ est en D la congruence (1,1) aux axes B_1, B_2 et donc pas un lieu proprement dit.

$$\gamma) \dots b^4b_d = 2B.$$

Ici nous avons à nous occuper des lieux $(b^3b_d)_2, (b^2b_d)_3, (b^4)_3$.

Le lieu $(b^3b_d)_2$ est le système réglé (B_1, B_2, B_3) en D , où B_1, B_2, B_3 sont les droites d'intersection de l'espace D de b_d avec les plans C_1, C_2, C_3 des trois conditions b .

Le lieu $(b^2b_d)_3$ est en D la congruence (1,1) aux axes B_1, B_2 .

Enfin le lieu $(b^4)_3$ est un espace courbe du troisième ordre. Car, si C_1, C_2, C_3, C_4 sont les plans des quatre conditions b , un espace quelconque D_x mené par C_4 qui rencontre C_1, C_2, C_3 suivant les droites B_1, B_2, B_3 en contient une surface cubique, composée du système réglé (B_1, B_2, B_3) et du plan C_4 . En effet, un point quelconque A_x de C_4 détermine une droite unique faisant partie du lieu $(b^2b_d)_3$, l'intersection des trois espaces $(A_x C_1), (A_x C_2), (A_x C_3)$; donc C_4 appartient une fois à l'intersection considérée.

C'est à ce dernier lieu que s'applique la seconde des deux remarques précédentes. L'équation $b^4b_d = 2B$ fait voir qu'un espace D quelconque contient deux des droites qui satisfont à l'ensemble des conditions b^4 ; cela est en règle, car les quatre droites d'intersection de D avec les plans C_1, C_2, C_3, C_4 admettent deux

transversales communes. Mais cela n'implique nullement que le lieu $(b^4)_3$ lui-même doit être du second ordre. Car l'espace D en contient, à côté de ces deux transversales qui s'y trouvent en entier, une infinité double de points d'intersection avec les droites satisfaisant à b^4 , non situées en D . Un espace quelconque D coupe le lieu $(b^4)_3$ suivant une surface simple du troisième ordre qui contient les deux transversales, voilà tout.

Il est intéressant à étudier la correspondance des points d'intersection A_1, A_2, A_3, A_4 d'une même droite variable B_x du lieu $(b^4)_3$ avec les plans C_1, C_2, C_3, C_4 . Les points A_1 et A_2 se correspondent un à un; donc la correspondance entre ces points est une transformation de CREMONA. Si B_1 et B_2 sont deux droites quelconques, la première de C_1 et la seconde de C_2 , on trouve que deux des droites B_x qui s'appuient sur B_1 , rencontrent B_2 , eu égard à l'équation $b^2b_6^2 = 2B$; donc, si A_1 décrit en C_1 la droite B_1 , A_2 parcourt en C_2 une conique, en d'autres termes: la transformation de CREMONA est une transformation quadratique. Nous cherchons les trois points fondamentaux du plan C_1 par rapport au plan C_2 . Évidemment les points d'intersection $A_{1,3}$ et $A_{1,4}$ de C_1 avec C_3 et C_4 sont deux de ces points; car par chacun de ces points il passe une infinité de droites B_x situées dans un même plan, celles par $A_{1,3}$ dans le plan d'intersection des deux espaces $(A_{1,3} C_2), (A_{1,3} C_4)$, celles par $A_{1,4}$ dans le plan d'intersection des deux espaces $(A_{1,4} C_2), (A_{1,4} C_3)$. Et le troisième point fondamental est le point d'intersection $A_{2,3,4}$ de C_1 avec le plan $C_{2,3,4}$ déterminé par les points d'intersection $A_{3,4}, A_{2,4}, A_{2,3}$ des trois plans C_2, C_3, C_4 pris deux à deux, chaque droite par $A_{2,3,4}$ en $C_{2,3,4}$ coupant à la fois la droite $A_{2,4} A_{2,3}$ de C_2 , la droite $A_{3,4} A_{2,3}$ de C_3 et la droite $A_{3,4} A_{2,4}$ de C_4 .

$$\delta) \dots b^4b_6 = 3B.$$

Ici il s'agit des lieux $(b^3b_6)_2, (b^2b_6)_3, (b^4)_3$ dont nous n'avons à étudier que le premier, le second figurant sous α) et le dernier sous γ).

Si C_1, C_2, C_3 et B sont les plans des trois conditions b et la droite de la condition b_6 , il est évident que le lieu $(b^3b_6)_2$ est en même temps le lieu de la droite d'intersection B_x des espaces correspondants $(A_x C_1), (A_x C_2), (A_x C_3)$ de trois faisceaux d'espaces projectifs, où A_x est un point variable de B , ces faisceaux d'espaces étant en rapport projectif l'un avec l'autre, parce qu'ils sont en rapport perspectif avec la ponctuelle (A_x) des points A_x de B ;

ce lieu est donc effectivement une surface cubique tordue. Car un espace D coupe les trois faisceaux d'espaces projectifs suivant trois faisceaux de plans projectifs, et ces trois faisceaux de plans engendrent une cubique gauche.

D'après l'équation $b^2b_b^2 = 2B$ une droite quelconque du plan C_1 rencontre deux droites B_x du lieu $(b^3b_b)_2$; donc chacun des trois plans C_1, C_2, C_3 contient une conique faisant partie du lieu. La conique en C_1 passe par les points d'intersection $A_{1,2}, A_{1,3}$ de ce plan avec C_2 et C_3 , etc.

$$\varepsilon) \dots b^6 = 5B.$$

Ici l'on trouve $(b^5)_2$ et $(b^4)_3$ dont seulement le premier lieu reste à étudier. D'après l'équation $b^6 = 5B$ la surface $(b^5)_2$ est du cinquième ordre, d'après l'équation $b^4b_b = 3B$ chacun des plans des cinq conditions b la coupe suivant une cubique. La cubique en C_1 passe par les points d'intersection $A_{1,i}$ ($i = 2, 3, 4, 5$) de ce plan avec les quatre autres.

Les cubiques que nous venons de trouver, sont-elles des courbes rationnelles ou des courbes dont le genre est l'unité? Dans le premier cas il faut que le lieu $(b^4)_3$ étudié sous γ admette un plan double, afin que ce lieu soit coupé par un plan quelconque C_5 suivant une cubique à point double. Mais il est évident que le lieu $(b^4)_3$ n'admet pas de plan double. Car la supposition qu'il en fit autant, implique que chaque espace couperait ce lieu suivant une surface cubique, tandis que nous avons déjà remarqué que chaque espace D mené par le plan C_4 en contient le plan C_4 et un système réglé tout à fait indépendant de ce plan. Donc les cubiques dont il s'agit, sont des courbes du genre 1.

Résumé. Les lieux nouveaux qui se sont présentés, sont $(b^2b_b)_3^2$, $(b^4)_3^3$, $(b^3b_b)_2^3$, $(b^5)_2^5$, où les petites chiffres en haut indiquent l'ordre. Nous y ajoutons tout de suite les enveloppes corrélatives $(c^2c_c)_3^2$, $(c^4)_3^3$, $(c^3c_c)_2^3$, $(c^5)_2^5$.

1. Combinaisons simples des éléments.

Nous considérons maintenant quelques figures assez simples qu'on obtient en combinant deux, trois ou quatre éléments différents d'une telle manière que tous ces éléments se portent l'un l'autre.

La figure la plus simple de cette catégorie est composée d'une

droite portant un point; nous la représentons par le symbole $(a, b)_7$, en indiquant par l'indice 7 qu'elle peut satisfaire à sept conditions simples. En rapport avec cette notation nous disons qu'une combinaison est à indice p , quand elle peut satisfaire à p conditions simples au plus. Ainsi l'on a trois combinaisons binaires à indice 7, trois combinaisons binaires à indice 8, quatre combinaisons ternaires à indice 9 et une seule combinaison quaternaire à indice 10; ce sont

$$\begin{aligned} & (ab)_7, (ad)_7, (cd)_7, \\ & (ac)_8, (bc)_8, (bd)_8, \\ & (abc)_9, (abd)_9, (acd)_9, (bcd)_9, \\ & (abcd)_{10}. \end{aligned}$$

Nous les examinons l'une après l'autre, d'abord pour nous exercer dans l'usage des relations trouvées au numéro 2 et ensuite comme introduction aux combinaisons à répétition qui suivent dans le numéro 5.

x) . . . Les combinaisons binaires.

α_1 . La figure $(ab)_7$ admet la formule de réduction $ab = a^2 + b_a$. En effet, si l'on suppose que le plan C de la condition b se trouve dans l'espace D de la condition a , on trouve que le système quintuplement infini des figures $(ab)_7$ qui satisfont à la condition double ab , se divise en deux classes différentes. Une de ces classes consiste des droites b qui coupent D en un point quelconque de C , ce point y figurant comme point a ; ces figures satisfont à la condition $a_c = a^2$. L'autre classe comprend les droites en D , le point d'intersection avec le plan C faisant emploi de point a ; ces figures satisfont à la condition b_a . En écrivant l'équation démontrée dans la forme $a^2 = ab - b_a$ on voit tout de suite qu'elle nous permet d'exprimer les conditions a^2 , a^3 , a^4 par un ensemble de conditions ne contenant qu'au premier degré la condition a . Ainsi l'on obtient :

$$\begin{aligned} a_c &= a^2 = ab - b_a, \\ a_b &= a^3 = a(ab - b_a) = b(ab - b_a) - ab_a = a(b^2 - b_a) - b b_a = ab_b - b_e, \\ A &= a^4 = a(ab_b - b_e) = b_b(ab - b_a) - ab_e = a(bb_b - b_e) - b_b b_a = ab_a - b_n. \end{aligned}$$

Done on trouve pour les combinaisons complètes des symboles primaires :

$$\begin{aligned}
aB &= 1, \\
a^2b_s &= (ab - b_d)b_s = 1, \\
a^3b_c &= (ab_b - b_e)b_c = 0, \\
a^3b_n &= (ab_b - b_e)b_n = 1, \\
Ab_a &= (ab_a - b_n)b_a = 1, \\
Ab_e &= (ab_a - b_n)b_e = 0.
\end{aligned}$$

Ces résultats très simples nous suggèrent une remarque qui nous sera utile. Tous les symboles se réduisent à deux termes dont le premier contient a au premier degré, tandis que le second ne contient que des conditions se rapportant à la droite b . Eh bien, aussitôt qu'il s'agit de la détermination d'un nombre fini de figures le second terme s'annule, parce qu'il impose une condition septuple à la droite b qui est de l'indice six. Ainsi dans le cas de a^2b_s le terme b_db_s disparaît, etc.

Il est inutile de faire connaître tous les autres nombres. Donc nous ne mentionnons que les combinaisons pures de puissances

$$\begin{aligned}
ab^6 &= 5 \quad aB = 5, \quad a^2b^5 = 5 \quad a^2b_s = 5, \\
a^3b^4 &= a^3(2b_c + 3b_n) = 3, \\
a^4b^3 &= A(b_a + 2b_e) = 1.
\end{aligned}$$

α_2 . La figure $(ad)_7$ n'obéit pas à une formule de réduction. On n'y rencontre que les deux ensembles complets a^3D , Ad^3 , chacun desquels est égal à l'unité.

α_3 . En E_k la figure $(cd)_7$ est la figure corrélatrice de $(ab)_7$. On a donc :

$$\begin{aligned}
d_b &= d^2 = cd - c_e, \quad d_c = d^3 = c_d d - c_e, \quad D = d^4 = c_d d - c_n, \\
Cd &= 1, \quad c_s d^2 = 1, \quad c_b d^3 = 0, \quad c_n d^3 = 1, \quad c_d D = 1, \quad c_e D = 0, \\
c^6 d &= 5, \quad c^5 d^2 = 5, \quad c^4 d^3 = 3, \quad c^3 d^4 = 1.
\end{aligned}$$

α_4 . La figure $(ac)^8$ donne lieu aux combinaisons complètes $a_c C$, $a_b c_s$, Ac_b , Ac_n de symboles primaires. Elle n'admet pas de formule de réduction, ce qui n'empêche pas qu'on trouve immédiatement

$$a_c C = 1, \quad a_b c_s = 1, \quad Ac_b = 1, \quad Ac_n = 0$$

et donc aussi

$$a^2c^6 = 5, \quad a^3c^5 = 5, \quad a^4c^4 = 2.$$

Nous y ajoutons

$$\begin{aligned} a^4 c^2 c_c &= 1, & a^3 c^3 c_c &= 3, & a^2 c^4 c_c &= 3, \\ a^4 c c_d &= 0, & a^3 c^2 c_d &= 1, & a^2 c^3 c_d &= 1, \end{aligned}$$

ce qui nous sera utile tout-à-l'heure.

α_5 . La figure $(bc)_8$ admet les combinaisons complètes de symboles primaires

$$b_b C, b_d C; \quad b_a c_s, b_e c_s; \quad b_c c_b, b_c c_n, b_n c_b, b_n c_n; \quad b_s c_d, b_s c_e; \quad Bc_a, Bc_e.$$

On trouve sans peine les deux tableaux

$$\begin{aligned} b_b C &= 0 = Bc_e, & b_d C &= 1 = Bc_a, \\ b_a c_s &= 0 = b_s c_d, & b_e c_s &= 1 = b_s c_e, \\ b_c c_b &= 0, & b_c c_n &= 1 = b_n c_b, & b_n c_n &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b^2 c^6 &= 5 (b_b + b_d) C = 5 = b^6 c^2, \\ b^3 c^5 &= 5 (b_a + 2 b_e) c_s = 10 = b^5 c^3, \\ b^4 c^4 &= (2 b_c + 3 b_n) (2 c_b + 3 c_n) = 12 \end{aligned}$$

qui s'accordent avec la loi de la dualité.

En supposant que le plan C de la condition b passe par la droite B de la condition c on trouve la relation $bc = b_b + c_c$. Elle mène aussi aux nombres $b^2 c^6$, etc. que nous venons de déduire. Ainsi l'on a :

$$b^4 c^4 = b_b^4 + 4 b_b^3 c_c + 6 b_b^2 c_c^2 + 4 b_b c_c^3 + c_c^4,$$

ce qui fait retrouver la valeur 12. En effet, d'abord on a $b_b^4 = 0$ et $c_c^4 = 0$, les figures b et c d'indice six ne pouvant pas satisfaire à un ensemble de huit conditions simples. Ensuite on a $b_b^3 c_c = Bc_c = 0$ et $b_b c_c^3 = b_b C = 0$, parce que la droite B de Bc_c ne rencontre pas le plan C de la condition c_c , etc. Et enfin

$$b_b^2 c_c^2 = (b_c + b_n) (c_b + c_n) = 2.$$

α_6 . La figure $(bd)_8$ est en E_4 la figure corrélatrice de $(ac)_8$. On a donc :

$$\begin{aligned} Bd_b &= 1, & b_s d_c &= 1, & b_c D &= 1, & b_n D &= 0 \\ b^4 d^4 &= 2, & b^5 d^3 &= 5, & b^6 d^2 &= 5. \end{aligned}$$

$\beta)$. . . Les combinaisons ternaires.

β_1 . La figure $(abc)_j$ est soumise aux deux relations

$$ab = a^2 + b_d, \quad bc = b_b + c_c$$

contenant deux des trois éléments a, b, c . En les combinant on trouve, eu égard à l'équation $b^2 = b_b + b_d$, la formule

$$b^2 = b(a + c) - (a^2 + c_a),$$

qui permet de transformer tout ensemble $a^p b^q c^r$ ($p + q + r < 10$) à une forme linéaire en b . Seulement nous supprimons ici les expressions qu'on obtient pour b^3, b^4, b^5, b^6 à l'aide de cette formule, d'autant plus que ces expressions vont paraître ailleurs (voir le numéro suivant). A leur place nous donnons ici les deux tableaux suivants qu'on dresse sans peine :

$Abc_b = 1$	$a^3 b_b c_b = 1$	$a^2 b C = 1$	$a^2 B c = 0$
$Abc_n = 0$	$a^3 b_b c_n = 1$	$a^2 b_b c_s = 1$	$a b_b C = 0$
$Ab_b c_d = 0$	$a^3 b_a c_b = 1$	$a^2 b_a c_s = 1$	$a b_d C = 1$
$Ab_b c_e = 1$	$a^3 b_a c_n = 0$	$a^2 b_a c_b = 1$	$a b_a c_s = 0$
$Ab_a c_d = 0$	$a^3 b_a c_n = 0$	$a^2 b_a c_n = 0$	$a b_e c_s = 1$
$Ab_a c_e = 0$	$a^3 b_a c_e = 1$	$a^2 b_e c_b = 1$	$a b_e c_b = 0$
$Ab_a c_a = 1$	$a^3 b_e c_d = 0$	$a^2 b_e c_n = 1$	$a b_e c_n = 1$
$Ab_a c_c = 0$	$a^3 b_e c_e = 1$	$a^2 b_e c_d = 0$	$a b_n c_b = 1$
$Ab_e c_a = 0$	$a^3 b_e c_a = 0$	$a^2 b_e c_e = 1$	$a b_n c_n = 0$
$Ab_e c_c = 0$	$a^3 b_e c_c = 0$	$a^2 b_n c_d = 0$	$a b_s c_d = 0$
$Ab_e c_e = 0$	$a^3 b_n c_a = 1$	$a^2 b_n c_e = 1$	$a b_s c_e = 1$
$Ab_n c = 0$	$a^3 b_n c_c = 0$	$a^2 b_s c_a = 1$	$a B c_a = 1$
$a^3 b c_s = 1$	$a^3 b_s c_c = 0$	$a^2 b_s c_e = 0$	$a B c_c = 0$

$Abc^4 = 2$	$a^2 b^2 c^4 = 7$	$a^2 b^2 c^5 = 10$	$a b^2 c^6 = 5$
$Ab^2 c^3 = 2$	$a^3 b^3 c^3 = 6$	$a^2 b^3 c^4 = 12$	$a b^3 c^5 = 5$
$Ab^3 c^2 = 1$	$a^3 b^4 c^2 = 3$	$a^2 b^4 c^3 = 10$	$a b^4 c^4 = 12$
$Ab^4 c = 0$	$a^3 b^5 c = 5$	$a^2 b^5 c^2 = 5$	$a b^5 c^3 = 10$
$a^3 b c^5 = 5$	$a^2 b c^6 = 5$	$a^2 b^6 c = 0$	$a b^6 c^2 = 5$

Nous remarquons que la quatrième partie du premier tableau s'obtient à l'aide des douze nombres donnés sous α_5 .

β_2 . Pour la figure $(abd)_j$ on trouve les deux tableaux :

$AbD = 0$	$Ab_a d^2 = 1$	$Ab_n d = 0$	$a^3 b_a d^3 = 1$
$Ab_b d^3 = 1$	$Ab_e d^2 = 0$	$a^3 b_b D = 1$	$a^3 b_e d^3 = 1$
$Ab_a d^3 = 0$	$Ab_e d = 0$	$a^3 b_d D = 0$	$a^3 b_e d^2 = 0$

$a^3b_nd^2 = 1$	$a^2b_eD = 1$	$a^2b_sd^2 = 1$	$ab_nD = 0$
$a^3b_sd = 0$	$a^2b_c d^3 = 1$	$a^2Bd = 0$	$ab_sd^3 = 1$
$a^2b_aD = 0$	$a^2b_nd^3 = 1$	$a b_c D = 1$	$aBd^2 = 1$

$AbD = 0$	$a^3b^2D = 1$	$a^2b^3D = 2$	$ab^4D = 2$
$Ab^2d^3 = 1$	$a^3b^3d^3 = 3$	$a^2b^4d^3 = 5$	$ab^5d^3 = 5$
$Ab^3d^2 = 1$	$a^3b^4d^2 = 3$	$a^2b^5d^2 = 5$	$ab^6d^2 = 5$
$Ab^4d = 0$	$a^3b^5d = 0$	$a^2b^6d = 0$	

Nous remarquons qu'ici toutes les combinaisons où d figure à la première puissance disparaissent, l'espace d exigeant encore la connaissance de deux de ses points quand la droite b a été déterminée. Pour la dernière partie du premier tableau on peut comparer α_6 .

β_3 et β_4 . Les figures $(acd)_9$ et $(bcd)_9$ sont en E_4 les figures corrélatives de $(abd)_9$ et $(abc)_9$, etc.

$\gamma)$. . . La combinaison quaternaire.

Pour la figure $(abcd)_{10}$ on trouve sans peine, même en s'abstenant de l'emploi de toute formule de réduction, les deux tableaux suivants :

$AbcD = 0 = AbcD$	$Ab_ccd^2 = 0 = a^2bc_eD$	$a^3b_ac_e d^2 = 1 = a^2b_e c_a d^3$
$Abc_d d^3 = 0 = a^3b_a cD$	$Ab_a c_a d = 1 = ab_e c_a d$	$a^3b_b c_b d = 1 = ab_c c_c d^3$
$Abc_e d^3 = 1 = a^3b_b cD$	$Ab_a c_e d = 0 = ab_b c_a d$	$a^3b_b c_n d = 1 = ab_n c_e d^3$
$Abc_a d^2 = 0 = a^2b_a cD$	$Ab_e c_a d = 0 = ab_a c_e d$	$a^3b_a c_b d = 1 = ab_c c_a d^3$
$Abc_e d^2 = 1 = a^2b_e cD$	$Ab_e c_e d = 0 = ab_b c_e d$	$a^3b_a c_n d = 1 = ab_n c_a d^3$
$Abc_b d = 1 = ab_c cD$	$Ab_c c_d = 0 = abc_b D$	$a^3b_a c_a d^2 = 1 = a^2b_a c_a d^3$
$Abc_n d = 0 = ab_n cD$	$Ab_n c_d = 0 = abc_n D$	$a^3b_a c_e d^2 = 1 = a^2b_b c_a d^3$
$Ab_b c d^3 = 1 = a^3b_c cD$	$a^3b_c d^3 = 1 = a^3b_a c d^3$	$a^3b_c c_a d^2 = 1 = a^2b_a c_e d^3$
$Ab_a c d^3 = 0 = a^3b_c aD$	$a^3b_c e d^3 = 1 = a^3b_e c d^3$	$a^3b_e c_c d^2 = 1 = a^2b_b c_e d^3$
$Ab_b c_a d^2 = 0 = a^2b_a c_e D$	$a^3b_c b d^2 = 1 = a^2b_c c d^3$	$a^3b_a c_a d = 0 = ab_a c_a d^3$
$Ab_b c_e d^2 = 1 = a^2b_b c_e D$	$a^3b_c n d^2 = 1 = a^2b_n c_e d^3$	$a^3b_n c_e d = 1 = ab_e c_e d^3$
$Ab_a c_a d^2 = 0 = a^2b_a c_a D$	$a^3b_c s d = 1 = ab_e c d^3$	$a^3b_n c_a d = 0 = ab_a c_e d^3$
$Ab_a c_e d^2 = 0 = a^2b_b c_a D$	$a^3b_b c_a d^3 = 1 = a^3b_a c_e d^3$	$a^3b_e c_e d = 1 = ab_e c_e d^3$
$Ab_b c_a d = 0 = ab_a c_e D$	$a^3b_b c_e d^3 = 2 = a^3b_b c_e d^3$	$a^3b_c c d^2 = 0 = a^2b_c b d^3$
$Ab_b c_e d = 1 = ab_e c_e D$	$a^3b_a c_n d^3 = 0 = a^3b_a c_a d^3$	$a^3b_n c d^2 = 1 = a^2b_c n d^3$
$Ab_a c_a d = 0 = ab_a c_a D$	$a^3b_b c_a d^2 = 1 = a^2b_a c_e d^3$	$a^3b_n c_a d = 0 = ab_a c_b d^3$
$Ab_a c_e d = 0 = ab_e c_a D$	$a^3b_b c_e d^2 = 2 = a^2b_e c_e d^3$	$a^3b_c c_c d = 0 = ab_b c_b d^3$
$Ab_a c d^2 = 1 = a^2b_c aD$	$a^3b_a c_a d^2 = 0 = a^2b_a c_a d^3$	$a^3b_n c_a d = 1 = ab_a c_n d^3$

$a^3b_n c_d d = 0 = ab_n c_n d^3$	$a^2b_a c_e d^2 = 1 = a^2b_e c_a d^2$	$a^2b_s c_c d = 0 = ab_b c_s d^2$
$a^3b_s c d = 0 = ab c_s d^3$	$a^2b_e c_e d^2 = 2 = a^2b_e c_e d^2$	$a^2Bcd = 0 = abCd^2$
$a^2b c_s d^2 = 1 = a^2b_s c d^2$	$a^2b_a c_b d = 1 = ab_c c_a d^2$	$ab_b Cd = 0 = aBc_c d$
$a^2b c d = 1 = aBc d^2$	$a^2b c_n d = 0 = ab_n c_a d^2$	$ab_n C d = 1 = aBc_n d$
$a^2b_b c_d d^2 = 1 = a^2b_c c_e d^2$	$a^2b_e c_b d = 1 = ab_c c_e d^2$	$ab_a c_s d = 0 = ab_s c_a d$
$a^2b_b c_n d^2 = 1 = a^2b_n c_e d^2$	$a^2b_e c_n d = 1 = ab_n c_e d^2$	$ab_e c_s d = 1 = ab_s c_e d$
$a^2b_a c_b d^2 = 1 = a^2b_c c_a d^2$	$a^2b_e c_a d = 0 = ab_a c_b d^2$	$ab_c c_b d = 0 = ab_c c_b d$
$a^2b_a c_n d^2 = 1 = a^2b_n c_a d^2$	$a^2b_e c_e d = 1 = ab_e c_b d^2$	$ab_c c_n d = 0 = ab_n c_b d$
$a^2b_b c_s d = 1 = ab_s c_c d^2$	$a^2b_n c_a d = 0 = ab_a c_n d^2$	$ab_n c_n d = 0 = ab_n c_n d$
$a^2b_a c_s d = 1 = ab_s c_a d^2$	$a^2b_n c_e d = 1 = ab_e c_n d^2$	
$a^2b_n c_a d^2 = 0 = a^2b_n c_a d^2$	$a^2b_s c_a d = 1 = ab_a c_s d^2$	

$AbcD = 0 = AbcD$	$a^3bc^4d^2 = 5 = a^2b^4cd^3$	$a^2bc^6d = 5 = ab^6cd^2$
$Abc^2d^3 = 1 = a^3b^2cD$	$a^3bc^5d = 5 = ab^5cd^3$	$a^2b^2c^4d^2 = 10 = a^2b^4c^2d^2$
$Abc^3d^2 = 2 = a^2b^3cD$	$a^3b^2c^2d^3 = 6 = a^3b^2c^2d^3$	$a^2b^2c^5d = 10 = ab^5c^2d^2$
$Abc^4d = 2 = ab^4cD$	$a^3b^3c^3d^2 = 7 = a^2b^3c^3d^2$	$a^2b^3c^4d^2 = 12 = a^2b^3c^3d^2$
$Ab^2cd^3 = 1 = a^3bc^2D$	$a^3b^2c^4d = 10 = ab^4c^2d^3$	$a^2b^3c^4d = 12 = ab^4c^3d^2$
$Ab^2c^2d^2 = 1 = a^2b^2c^2D$	$a^3b^3c^2d^2 = 6 = a^2b^2c^3d^3$	$a^2b^4c^3d = 10 = ab^3c^4d^2$
$Ab^2c^3d = 2 = ab^3c^2D$	$a^3b^3c^3d = 6 = ab^3c^3d^3$	$a^2b^5c^2d = 5 = ab^2c^5d^2$
$Ab^3cd^2 = 1 = a^2bc^3D$	$a^3b^4cd^2 = 3 = a^2b^4c^4d^3$	$a^2b^6cd = 0 = abc^6d^2$
$Ab^3c^2d = 1 = ab^2c^3D$	$a^3b^4c^2d = 3 = ab^2c^4d^3$	$ab^2c^6d = 5 = ab^6c^2d$
$Ab^4cd = 0 = abc^4D$	$a^3b^5cd = 0 = abc^5d^3$	$ab^3c^5d = 5 = ab^5c^3d$
$a^3bc^3d^3 = 3 = a^3b^3cd^3$	$a^2bc^5d^2 = 5 = a^2b^5cd^2$	$ab^4c^4d = 0 = ab^4c^4d$

De ces deux tableaux le premier contient 163 et le second 62 nombres en rapport avec la figure $(abcd)_{10}$.

Nous rappelons que les nombres $a^p b^q c^r d$, $(p + q + r = 9)$ se déduisent de β_1 , etc.

5. Combinaisons à répétition d'éléments.

L'étude des figures $(a\alpha bc)_{10}$, $(ab\beta c)_{10}$, $(a\alpha bcd)_{11}$, $(ab\beta cd)_{11}$, $(a\alpha b\gamma d)_{12}$, où α , β , γ indiquent respectivement un second point, une seconde droite et un second plan, nous fera connaître des nombres qui nous seront utiles prochainement.

$$\alpha) \dots (a\alpha bc)_{10}.$$

Considérons d'abord la figure plus simple $(a\alpha b)_8$ qui consiste d'une droite b portant deux points a , α . Pour elle on a, eu égard aux formules de $4\alpha_1$:

$$\begin{array}{l|l}
 a^2 = ab - b_d, & a^4\alpha = a\alpha b_a - \alpha b_n, \\
 & a^3\alpha^2 = a\alpha(b_a + b_e) - ab_n - \alpha(b_c + b_n) + b_s, \\
 a^3 = ab_b - b_e, & a^4\alpha^2 = a\alpha b_n - \alpha b_s, \\
 a^2\alpha = a\alpha b - \alpha b_d, & a^3\alpha^3 = a\alpha(b_c + b_n) - (a + \alpha)b_s + B, \\
 a^4 = ab_a - b_n, & a^4\alpha^3 = a\alpha b_s - \alpha B, \\
 a^3\alpha = a\alpha b_b - \alpha b_e, & a^4\alpha^4 = a\alpha B, \\
 a^2\alpha^2 = a\alpha(b_b + b_d) - (a + \alpha)b_e + b_c, &
 \end{array}$$

Ici s'applique encore la remarque de $4\alpha_1$: Dans tous les cas, où il s'agit de la détermination d'un nombre fini de figures, c'est toujours le terme en $a\alpha$ du second membre qui donne à lui seul le résultat entier. Dans ces cas on ne garde donc que

$$\begin{array}{l|l|l}
 a^2\alpha\mu_5 = a\alpha b\mu_5, & a^4\alpha\mu_3 = a\alpha b_a\mu_3, & a^3\alpha^3\mu_2 = a\alpha(b_c + b_n)\mu_2, \\
 a^3\alpha\mu_4 = a\alpha b_b\mu_4, & a^3\alpha^2\mu_3 = a\alpha(b_a + b_e)\mu_3, & a^4\alpha^3\mu_1 = a\alpha b_s\mu_1, \\
 a^2\alpha^2\mu_4 = a\alpha(b_b + b_d)\mu_4, & a^4\alpha^2\mu_2 = a\alpha b_n\mu_2, & a^4\alpha^4 = a\alpha B,
 \end{array}$$

où μ_i représente un ensemble de conditions imposé à b équivalant à i conditions simples. Et alors le nombre des figures est égal à celui des droites satisfaisant aux conditions $b\mu^5$, $b_b\mu^4$, ... B imposées à b , les facteurs a, α déterminant les points a, α après que la droite b a été trouvée.

A l'aide de ces formules on évalue sans peine tous les nombres en rapport avec les figures $(a\alpha b)_8$. En deux petits tableaux nous en réunissons deux catégories distinctes. La première catégorie se compose des nombres $a^{p_1}\alpha^{p_2}b^q$, où $p_1 + p_2 + q = 8$; nous les donnons sans coefficient binomial, c'est-à-dire dans la supposition que les p_1 espaces par a , les p_2 espaces par α et les q plans de la condition b^q ont été indiqués séparément. La seconde catégorie contient les nombres $a^p b^q$, où $p + q = 8$; on les obtient par l'addition des nombres constituants $a^{p_1}\alpha^{p_2}b^q$, chacun de ces derniers étant multiplié d'avance par le coefficient binomial convenable. Pour en faciliter la composition typographique nous y remplaçons les symboles $a^{p_1}\alpha^{p_2}b^q$ et $a^p b^q$ par $(p_1 p_2 q)$ et (pq) , en ayant soin d'intercaler le zéro aussitôt qu'une quelconque des quantités p_1, p_2, p, q s'annule.

Nombres $a^{p_1}\alpha^{p_2}b^q = (p_1 p_2 q)$.

$$\begin{array}{llll}
 (440) = 1, & (422) = 1, & (332) = 2, & (314) = 3, & (215) = 5, \\
 (431) = 1, & (413) = 1, & (323) = 3, & (224) = 5, & (116) = 5.
 \end{array}$$

Nombres $a^{p_1+p_2}b^q = (pq)$.

$$\begin{array}{llll}
 (80) = 35, & (71) = 35, & (62) = 35, & (53) = 35, & (44) = 27, \\
 (35) = 15, & (26) = 5.
 \end{array}$$

L'exemple suivant montre comment s'obtiennent les nombres du second de ces deux petits tableaux. En désignant par 4_1 et 4_2 le premier et le second coefficient binomial de puissance 4, on a :

$$\begin{aligned}(44) &= 4_1(314) + \frac{1}{2} 4_2(224) \\ &= (4_1 a^3 a + \frac{1}{2} 4_2 a^2 a^2) b^4 = [4b_b + 3(b_b + b_d)] b^4 = 27 B.\end{aligned}$$

Donc $(44) = 27$, etc.

Passons maintenant à la figure $(axbc)_{10}$. Pour elle on trouve, en combinant les résultats que nous venons de déduire à ceux de $4a_5$, les deux tableaux suivants :

Nombres $a^{p_1} a^{q_2} b^r c^r = (p_1 p_2 q r)$.

$(4402) = 1$	$(4123) = 2$	$(3214) = 7$	$(2233) = 10$	$(2125) = 10$
$(4312) = 1$	$(4114) = 2$	$(3205) = 5$	$(2224) = 12$	$(2116) = 5$
$(4303) = 2$	$(3322) = 2$	$(3142) = 3$	$(2215) = 10$	$(1162) = 5$
$(4222) = 1$	$(3313) = 4$	$(3133) = 6$	$(2206) = 5$	$(1153) = 10$
$(4213) = 2$	$(3304) = 5$	$(3124) = 7$	$(2152) = 5$	$(1144) = 12$
$(4204) = 2$	$(3232) = 3$	$(3115) = 5$	$(2143) = 10$	$(1135) = 10$
$(4132) = 1$	$(3223) = 6$	$(2242) = 5$	$(2134) = 12$	$(1126) = 5$

Nombres $a^{p_1+p_2} b^q c^r = (pqr)$.

$(802) = 35$	$(604) = 80$	$(442) = 27$	$(352) = 15$	$(262) = 5$
$(712) = 35$	$(532) = 35$	$(433) = 54$	$(343) = 30$	$(253) = 10$
$(703) = 70$	$(523) = 70$	$(424) = 64$	$(334) = 36$	$(244) = 12$
$(622) = 35$	$(514) = 80$	$(415) = 50$	$(325) = 30$	$(235) = 10$
$(613) = 70$	$(505) = 50$	$(406) = 15$	$(316) = 15$	$(226) = 5$

Nous remarquons que tous les nombres (pqr) où $p < 2$ ou $r < 2$ disparaissent, et que les nombres $(pq2)$ et $(2qr)$ se déduisent de ceux des figures plus simples $(axb)_8$ et $(bc)_8$.

$$\beta) \dots (ab\beta c)_{10}.$$

D'après le numéro $4\beta_1$ nous avons ici :

$$b^2 = b(a+c) - (a^2 + c_v).$$

$$\begin{aligned}b^3 &= b(2ac + c_v) - (a+c)(a^2 + c_v), \\ b^2\beta &= b\beta(a+c) - \beta(a^2 + c_v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^4 &= b(a+c)[2c_a - (a-c)^2] - (a^2 + c_v)(2ac + c_a), \\ b^3\beta &= b\beta(2ac + c_a) - \beta(a+c)(a^2 + c_v),\end{aligned}$$

$$b^2\beta^2 = b\beta(a+c)^2 - (b+\beta)(a+c)(a^2+c_c) + (a^2+c_c)^2.$$

$$\begin{aligned} b^5 &= b \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - (a^2+c_c)(2ac+c_a) \} - \\ &\quad (a+c)(a^2+c_c)[2c_a - (a-c)^2], \\ b^4\beta &= b\beta(a+c)[2c_a - (a-c)^2] - \beta(a^2+c_c)(2ac+c_a), \\ b^3\beta^2 &= b\beta(a+c)(2ac+c_a) - b(a^2+c_c)(2ac+c_a) - \beta(a+c)^2(a^2+c_c) + \\ &\quad (a+c)(a^2+c_c)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^6 &= b(a+c)(2ac+c_a)[2ac+c_a - 2(a^2+c_c)] - \\ &\quad (a^2+c_c)[(2ac+c_a)^2 - (a+c)^2(a^2+c_c)], \\ b^5\beta &= b\beta \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - (a^2+c_c)(2ac+c_a) \} - \\ &\quad \beta(a+c)(a^2+c_c)[2c_a - (a-c)^2], \\ b^4\beta^2 &= b\beta(a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - b(a+c)(a^2+c_c)[2c_a - (a-c)^2] - \\ &\quad \beta(a+c)(a^2+c_c)(2ac+c_a) + (a^2+c_c)^2(2ac+c_a), \\ b^3\beta^3 &= b\beta(2ac+c_a)^2 - (b+\beta)(a+c)(a^2+c_c)(2ac+c_a) + (a+c)^2(a^2+c_c)^2. \end{aligned}$$

Par multiplication on se forme sans peine les expressions analogues pour

$$b^6\beta, b^5\beta^2, b^4\beta^3; b^6\beta^2, b^5\beta^3, b^4\beta^4; b^6\beta^3, b^5\beta^4; b^6\beta^4, b^5\beta^5; b^6\beta^5; b^6\beta^6.$$

Et quand il s'agit d'un nombre fini de figures $(ab\beta c)_{10}$ on en déduit, μ_i représentant encore un ensemble de conditions équivalent à i conditions simples:

$$\begin{aligned} b^2\beta \mu_7 &= b\beta(a+c) \mu_7, \\ b^3\beta \mu_6 &= b\beta(2ac+c_a) \mu_6, \\ b^2\beta^2 \mu_6 &= b\beta(a+c)^2 \mu_6, \\ b^4\beta \mu_5 &= b\beta(a+c)[2c_a - (a-c)^2] \mu_5, \\ b^3\beta^2 \mu_5 &= b\beta(a+c)(2ac+c_a) \mu_5, \\ b^5\beta \mu_4 &= b\beta \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - (a^2+c_c)(2ac+c_a) \} \mu_4, \\ b^4\beta^2 \mu_4 &= b\beta(a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] \mu_4, \\ b^3\beta^3 \mu_4 &= b\beta(2ac+c_a)^2 \mu_4, \\ b^6\beta \mu_3 &= b\beta(a+c)(2ac+c_a)[2ac+c_a - 2(a^2+c_c)] \mu_3, \\ b^5\beta^2 \mu_3 &= b\beta(a+c) \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - (a^2+c_c)(2ac+c_a) \} \mu_3, \\ b^4\beta^3 \mu_3 &= b\beta(a+c)(2ac+c_a)[2c_a - (a-c)^2] \mu_3, \\ b^6\beta^2 \mu_2 &= b\beta(a+c)^2(2ac+c_a)[2ac+c_a - 2(a^2+c_c)] \mu_2, \\ b^5\beta^3 \mu_2 &= b\beta(2ac+c_a) \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - (a^2+c_c)(2ac+c_a) \} \mu_2, \\ b^4\beta^4 \mu_2 &= b\beta(a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2]^2 \mu_2, \\ b^6\beta^3 \mu_1 &= b\beta(a+c)(2ac+c_a)^2 [2ac+c_a - 2(a^2+c_c)] \mu_1, \\ b^5\beta^4 \mu_1 &= b\beta(a+c)[2c_a - (a-c)^2] \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - \\ &\quad (a^2+c_c)(2ac+c_a) \} \mu_1, \\ b^6\beta^4 &= b\beta(a+c)^2(2ac+c_a)[2c_a - (a-c)^2][2ac+c_a - 2(a^2+c_c)], \\ b^5\beta^5 &= b\beta \{ (a+c)^2 [2c_a - (a-c)^2] - (a^2+c_c)(2ac+c_a) \}^2. \end{aligned}$$

Ainsi l'on trouve les deux tableaux suivants :

Nombres $a^{p_1} b^{q_1} \beta^{q_2} c^r = (pq_1 q_2 r)$.

(4330) = 1	(3223) = 9	(2314) = 12	(1432) = 25	(0541) = 25
(4321) = 1	(3214) = 7	(2224) = 17	(1423) = 22	(0532) = 20
(4312) = 1	(3115) = 5	(2215) = 10	(1414) = 12	(0523) = 10
(4222) = 2	(2530) = 5	(2116) = 5	(1333) = 28	(0442) = 29
(4213) = 2	(2521) = 5	(1630) = 5	(1324) = 22	(0433) = 24
(4114) = 2	(2512) = 5	(1621) = 5	(1315) = 10	(0424) = 12
(3430) = 3	(2440) = 9	(1612) = 5	(1225) = 15	(0334) = 20
(3421) = 3	(2431) = 11	(1540) = 15	(1216) = 5	(0325) = 10
(3412) = 3	(2422) = 13	(1531) = 15	(0640) = 15	(0226) = 5
(3331) = 5	(2413) = 10	(1522) = 15	(0631) = 10	
(3322) = 7	(2332) = 17	(1513) = 10	(0622) = 5	
(3313) = 6	(2323) = 18	(1441) = 21	(0550) = 15	

Nombres $a^{p_1} b^{q_1+q_2} c^r = (pqr)$.

(460) = 10	(352) = 85	(253) = 230	(163) = 670	(073) = 1050
(451) = 10	(343) = 51	(244) = 99	(154) = 280	(064) = 380
(442) = 10	(334) = 21	(235) = 30	(145) = 85	(055) = 100
(433) = 6	(325) = 5	(226) = 5	(136) = 15	(046) = 15
(424) = 2	(280) = 595	(190) = 2310	(0,10,0) = 6300	
(370) = 105	(271) = 490	(181) = 1715	(091) = 3990	
(361) = 95	(262) = 395	(172) = 1225	(082) = 2275	

Dans le premier de ces deux tableaux on a supposé $q_1 \geq q_2$. Alors les nombres $(pq_1 q_2 r)$ qui s'annulent ne satisfont pas au complexe de conditions :

$$\begin{array}{lll} p \leq 4, & 1 \leq q \leq 6, & r \leq 6, \\ p + q_1 \leq 7, & p + r \leq 8, & q_1 + r \leq 8. \end{array}$$

Et dans le second nous avons été obligé d'écrire (0,10,0) avec des virgules.

$$\gamma) \dots (a \alpha b c d)_{11}.$$

Les nombres $(a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^r d^s)$ se déduisent de ceux de la figure plus simple $(a \alpha b c_{10})$ à l'aide des relations générales

$$\begin{aligned} (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^r d)_{11} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^1)_{10}, \dots p_1 + p_2 + q + r = 10, \\ (a^{p_1} \alpha^{p_1} b^{q_1} c^r d^2)_{11} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^{r-1})_{10}, \dots p_1 + p_2 + q + r = 9, \\ (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^r d^3)_{11} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^{r-2})_{10}, \dots p_1 + p_2 + q + r = 8, \\ (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^r d^4)_{11} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^{q_1} c^{r-3})_{10}, \dots p_1 + p_2 + q + r = 7. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les cas $s = 1$ et $s = 2$ on n'a plus rien à calculer, tandis que pour $s = 3$ et $s = 4$ les derniers deux tableaux de 5α ont besoin d'être complétés.

Pour $s = 3$ nous nous occupons des cas $r = 1$, $r = 2$. Car, d'abord pour $r = 0$ la figure $(a\alpha b)_3$ comprise en $(a\alpha bcd)_{11}$ est déterminée, et en général la droite B de cette figure plus simple ne rencontre pas le plan donné C de la condition c_c ; donc les nombres en rapport avec la supposition $r = 0$ disparaissent. Et ensuite, pour $r = 3$ et $r = 4$ les relations identiques

$$5c_c c^3 = 15c_s = 3c^5, \quad 5c_c c^4 = 15C = 3c^6$$

ramènent à l'avant-dernier tableau de 5α .

A l'aide des neuf formules de réduction de 5α , des relations entre les symboles b , des relations entre les symboles c et des nombres de $4\alpha_3$ on trouve sans peine

$$(4301) c_c = b_s c c_c = b_s (c_d + c_e) = 1$$

.....

etc., ce qui donne

$(4301) c_c = 1$	$(3302) c_c = 3$	$(2222) c_c = 7$
$(4211) c_c = 1$	$(3221) c_c = 3$	$(2141) c_c = 5$
$(4202) c_c = 1$	$(3212) c_c = 4$	$(2132) c_c = 7$
$(4121) c_c = 1$	$(3131) c_c = 3$	$(1151) c_c = 5$
$(4112) c_c = 1$	$(3122) c_c = 4$	$(1142) c_c = 7$
$(3311) c_c = 2$	$(2231) c_c = 5$	

Pour $s = 4$ nous pouvons emprunter les nombres en question aux résultats connus de l'espace tridimensionnel; car on a

$$_4(a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^4)_{11} = _3(a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r)_7,$$

où les indices à gauche indiquent le nombre des dimensions de l'espace support. Seulement nous préférons à en insérer la déduction. Pour $r = 0$ les nombres disparaissent comme tout-à-l'heure, et pour $r = 2$ et $r = 3$ on a

$$5c_d c^2 = 5c_s = c^5, \quad 5c_d c^3 = 5C = c^6;$$

donc nous nous occupons du cas $r = 1$. Nous trouvons que la condition c_d est incompatible avec a^4 . Donc les nombres qui ne s'anulent pas, sont

$$\begin{aligned} (3301) c_d = 1, & \quad (3121) c_d = 1, & \quad (2131) c_d = 2, \\ (3211) c_d = 1, & \quad (2221) c_d = 2, & \quad (1141) c_d = 2. \end{aligned}$$

En combinant tous les résultats nous trouvons le tableau suivant, où e représente la fraction $\frac{1}{5}$:

Nombres $a^{p_1} a^{p_2} b^q c' d^s = (p_1 p_2 q r s)$.

(44021) = (44012) = 1	(42023) = (4202) $c_c = 1$
(43121) = (43112) = 1	(41213) = (4121) $c_c = 1$
(43031) = (43022) = 2	(41123) = (4112) $c_c = 1$
(42221) = (42212) = 1	(33113) = (3311) $c_c = 2$
(42131) = (42122) = 2	(33023) = (3302) $c_c = 3$
(42041) = (42032) = 2	(32213) = (3221) $c_c = 3$
(41321) = (41312) = 1	(32123) = (3212) $c_c = 4$
(41231) = (41222) = 2	(31313) = (3131) $c_c = 3$
(41141) = (41132) = 2	(31223) = (3122) $c_c = 4$
(33221) = (33212) = 2	(22313) = (2231) $c_c = 5$
(33131) = (33122) = 4	(22223) = (2222) $c_c = 7$
(33041) = (33032) = 5	(21413) = (2141) $c_c = 5$
(32321) = (32312) = 3	(21323) = (2132) $c_c = 7$
(32231) = (32222) = 6	(11513) = (1151) $c_c = 5$
(32141) = (32132) = 7	(11423) = (1142) $c_c = 7$
(32051) = (32042) = 5	(32033) = $3e(32051) = 3$
(31421) = (31412) = 3	(31133) = $3e(31151) = 3$
(31331) = (31322) = 6	(22133) = $3e(22151) = 6$
(31241) = (31232) = 7	(21233) = $3e(21251) = 6$
(31151) = (31142) = 5	(11333) = $3e(11351) = 6$
(22421) = (22412) = 5	(22043) = $3e(22061) = 3$
(22331) = (22322) = 10	(21143) = $3e(21161) = 3$
(22241) = (22232) = 12	(11243) = $3e(11267) = 3$
(22151) = (22142) = 10	(33014) = (3301) $c_d = 1$
(22061) = (22052) = 5	(32114) = (3211) $c_d = 1$
(21521) = (21512) = 5	(31214) = (3121) $c_d = 1$
(21431) = (21422) = 10	(22214) = (2221) $c_d = 2$
(21341) = (21332) = 12	(21314) = (2131) $c_d = 2$
(21251) = (21242) = 10	(11414) = (1141) $c_d = 2$
(21161) = (21152) = 5	(32021) = $e(32051) = 1$
(11621) = (11612) = 5	(31124) = $e(31151) = 1$
(11531) = (11522) = 10	(22124) = $e(22151) = 2$
(11441) = (11432) = 12	(21224) = $e(21251) = 2$
(11351) = (11342) = 10	(11324) = $e(11351) = 2$
(11261) = (11252) = 5	(22034) = $e(22061) = 1$
(43013) = (4301) $c_e = 1$	(21134) = $e(21161) = 1$
(42113) = (4211) $c_e = 1$	(11234) = $e(11261) = 1$

A l'aide de ce tableau on trouve les

Nombres $a^{p_1+p_2} b^q c^r d^s = (pqr s).$

(8021) = (8012) = 35	(5213) = 35
(7121) = (7112) = 35	(5123) = 45
(7031) = (7022) = 70	(5033) = 30
(6221) = (6212) = 35	(4313) = 27
(6131) = (6122) = 70	(4223) = 37
(6041) = (6032) = 80	(4133) = 30
(5321) = (5312) = 35	(4043) = 9
(5231) = (5222) = 40	(3413) = 15
(5141) = (5132) = 80	(3323) = 21
(5051) = (5042) = 50	(3233) = 18
(4421) = (4412) = 27	(3143) = 9
(4331) = (4322) = 54	(2513) = 5
(4241) = (4232) = 64	(2423) = 7
(4151) = (4142) = 50	(2333) = 6
(4061) = (4052) = 15	(2243) = 3
(3521) = (3512) = 15	(6014) = 10
(3431) = (3422) = 30	(5114) = 10
(3341) = (3332) = 36	(5024) = 10
(3251) = (3242) = 30	(4214) = 10
(3161) = (3152) = 15	(4124) = 10
(2621) = (2612) = 5	(4034) = 3
(2531) = (2522) = 10	(3314) = 6
(2441) = (2432) = 12	(3224) = 6
(2351) = (2342) = 10	(3134) = 3
(2261) = (2252) = 5	(2414) = 2
(7013) = 35	(2324) = 2
(6113) = 35	(2234) = 1
(6023) = 45	

$$\delta \dots (ab\beta cd)_{11}.$$

Les nombres $(a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r d^s)_{11}$ se déduisent de ceux de $(ab\beta c)_{10}$ au moyen des formules générales

$$\begin{aligned} (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r d)_{11} &= (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r)_{10}, \dots p + q_1 + q_2 + r = 10, \\ (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r d^2)_{11} &= (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^{r+1})_{10}, \dots p + q_1 + q_2 + r = 9, \\ (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r d^3)_{11} &= (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r c)_{10}, \dots p + q_1 + q_2 + r = 8, \\ (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r d^4)_{11} &= (a^p b^{q_1} \beta^{q_2} c^r c^2)_{10}, \dots p + q_1 + q_2 + r = 7. \end{aligned}$$

Donc les nombres $(ab\beta cd)_{11}$ sont connus pour $s = 1, s = 2$. Nous avons encore à étudier pour $s = 3$ les cas $r = 0, r = 1, r = 2$ et pour

$s = 4$ les cas $r = 0$, $r = 1$. Car, comme en 5γ) les cas $s = 3$, $r = 3$ et $s = 3$, $r = 4$ et les cas $s = 4$, $r = 2$ et $s = 4$, $r = 3$ se ramènent à des nombres $(ab\beta c)_{10}$ à l'aide des relations

$$\begin{aligned} 5c_c c^3 &= 3c^5, & 5c_c c^4 &= 3c^6, \\ 5c_d c^2 &= c^5, & 5c_d c^3 &= c^6. \end{aligned}$$

Nous dressons donc, à l'aide des dix-huit formules de 5β) et des résultats

$$\begin{aligned} a^4 c^2 c_c &= 1, & a^3 c^3 c_c &= 3, & a^2 c^4 c_c &= 3, \\ a^4 c c_d &= 0, & a^3 c^2 c_d &= 1, & a^2 c^3 c_d &= 1 \end{aligned}$$

de $4\alpha_i$, les deux tableaux complétants suivants:

$(4220) c_c = 1$	$(2330) c_c = 8$	$(1331) c_c = 16$
$(4211) c_c = 1$	$(2321) c_c = 10$	$(1322) c_c = 13$
$(4112) c_c = 1$	$(2312) c_c = 7$	$(0530) c_c = 10$
$(3320) c_c = 3$	$(2222) c_c = 10$	$(0521) c_c = 5$
$(3311) c_c = 3$	$(1520) c_c = 5$	$(0440) c_c = 16$
$(3221) c_c = 5$	$(1511) c_c = 5$	$(0431) c_c = 14$
$(3212) c_c = 4$	$(1430) c_c = 12$	$(0422) c_c = 7$
$(2420) c_c = 5$	$(1421) c_c = 12$	$(0332) c_c = 12$
$(2411) c_c = 5$	$(1412) c_c = 7$	
$(3220) c_d = 1$	$(2221) c_d = 3$	$(1321) c_d = 4$
$(3211) c_d = 1$	$(1120) c_d = 2$	$(0430) c_d = 4$
$(2320) c_d = 2$	$(1411) c_d = 2$	$(0421) c_d = 2$
$(2311) c_d = 2$	$(1330) c_d = 4$	$(0331) c_d = 4$

A l'aide de ces travaux préparatoires nous trouvons enfin le tableau des

Nombres $a^p b^{q_1} \beta^{t_2} c^r d^s = (pq_1 q_2 r s)$.

$(43301) = 1$	$(25211) = 5$	$(25121) = 5$	$(32231) = 9$	$(22241) = 17$
$(34301) = 3$	$(24311) = 11$	$(24221) = 13$	$(24131) = 10$	$(14141) = 12$
$(25301) = 5$	$(16211) = 5$	$(23321) = 17$	$(23231) = 18$	$(13241) = 22$
$(24401) = 9$	$(15311) = 15$	$(16121) = 5$	$(15131) = 10$	$(04241) = 12$
$(16301) = 5$	$(14411) = 21$	$(15221) = 15$	$(14231) = 22$	$(03341) = 20$
$(15401) = 15$	$(06311) = 10$	$(11321) = 25$	$(13331) = 28$	$(31151) = 5$
$(06401) = 15$	$(05411) = 25$	$(06221) = 5$	$(05231) = 10$	$(22151) = 10$
$(05501) = 25$	$(43121) = 1$	$(05321) = 20$	$(04331) = 24$	$(13151) = 10$
$(43211) = 1$	$(42221) = 2$	$(04421) = 29$	$(41141) = 2$	$(12251) = 15$
$(34211) = 3$	$(34121) = 3$	$(42131) = 2$	$(32141) = 7$	$(03251) = 10$
$(33311) = 5$	$(33221) = 7$	$(33131) = 6$	$(23141) = 12$	$(21161) = 5$

(12161) = 5	(14312) = 25	(03332) = 20	(23213) = 10	(02243) = 3
(02261) = 5	(06212) = 5	(31142) = 5	(15113) = 5	(32204) = 1
(43202) = 1	(05312) = 20	(22142) = 10	(14213) = 12	(23204) = 2
(34202) = 3	(04412) = 29	(13142) = 10	(13313) = 16	(14204) = 2
(33302) = 5	(42122) = 2	(12242) = 15	(05213) = 5	(13304) = 4
(25202) = 5	(33122) = 6	(03242) = 10	(04313) = 14	(04304) = 4
(24302) = 11	(32222) = 9	(21152) = 5	(41123) = 1	(32114) = 1
(16202) = 5	(24122) = 10	(12152) = 5	(32123) = 4	(23114) = 2
(15302) = 15	(23222) = 18	(02252) = 5	(23123) = 7	(22214) = 3
(14402) = 21	(15122) = 10	(42203) = 1	(22223) = 10	(14114) = 2
(06302) = 10	(14222) = 22	(33203) = 3	(14123) = 7	(13214) = 4
(05402) = 25	(13322) = 28	(24203) = 5	(13223) = 13	(04214) = 2
(43112) = 1	(05222) = 10	(23303) = 8	(04223) = 7	(03314) = 4
(42212) = 2	(04322) = 24	(15203) = 5	(03323) = 12	(31124) = 1
(34112) = 3	(41132) = 2	(14303) = 12	(31133) = 3	(22124) = 2
(33212) = 7	(32132) = 7	(05303) = 10	(22133) = 6	(13124) = 2
(25112) = 5	(23132) = 12	(04403) = 16	(13133) = 6	(12224) = 3
(24212) = 13	(22232) = 17	(42113) = 1	(12233) = 9	(03224) = 2
(23312) = 17	(14132) = 12	(33113) = 3	(03233) = 6	(21134) = 1
(16112) = 5	(13232) = 22	(32213) = 5	(21143) = 3	(12134) = 1
(15212) = 15	(04232) = 12	(24113) = 5	(12143) = 3	(02234) = 1

Nous remarquons que les 49 nombres de (43211) jusqu'à (02261) se répètent de (43202) jusqu'à (02252). Cela est d'accord, d'après la seconde des quatre formules générales données plus haut.

Au moyen de ce tableau on trouve les

Nombres $a^p b^{q_1+q_2} c^r d^3 = (pqrs).$

(4601) = 10	(3431) = 51	(4502) = 10	(3332) = 21
(3701) = 105	(2531) = 230	(3602) = 95	(2432) = 99
(2801) = 595	(1631) = 670	(2702) = 490	(1532) = 280
(1901) = 2310	(0731) = 1050	(1802) = 1715	(0632) = 380
(0,10,0,1) = 9450	(4241) = 2	(0902) = 3990	(3242) = 5
(4511) = 10	(3341) = 21	(4412) = 10	(2342) = 30
(3611) = 95	(2441) = 99	(3512) = 85	(1442) = 85
(2711) = 490	(1541) = 280	(2612) = 395	(0542) = 100
(1811) = 1715	(0641) = 380	(1712) = 1225	(2252) = 5
(0911) = 3990	(3251) = 5	(0812) = 2275	(1352) = 15
(4421) = 10	(2351) = 30	(4322) = 6	(0452) = 15
(3521) = 85	(1451) = 85	(3422) = 51	(4403) = 3
(2621) = 395	(0551) = 100	(2522) = 230	(3503) = 30
(1721) = 1225	(2261) = 5	(1622) = 670	(2603) = 155
(0821) = 2275	(1361) = 15	(0722) = 1050	(1703) = 525
(4331) = 6	(0461) = 15	(4232) = 2	(0803) = 1120

(4313) = 3	(1523) = 165	(0443) = 9	(0614) = 70
(3413) = 27	(0623) = 225	(3404) = 3	(3224) = 1
(2513) = 125	(3233) = 3	(2504) = 20	(2324) = 6
(1613) = 370	(2333) = 18	(1604) = 70	(1424) = 17
(0713) = 595	(1433) = 51	(0704) = 140	(0524) = 20
(4223) = 1	(0533) = 60	(3314) = 3	(2234) = 1
(3323) = 12	(2243) = 3	(2414) = 17	(1334) = 3
(2423) = 58	(1343) = 9	(1514) = 50	(0434) = 3

Ici les 27 nombres de (4511) jusqu'à (0461) se répètent de (4502) jusqu'à (0452).

$$\varepsilon) \dots (a \alpha b c \gamma d)_{12}.$$

Les nombres $(a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s)_{12}$ se réduisent aux nombres $(bd)_8$ à l'aide de deux opérations différentes. En premier lieu on remplace $a^{p_1} \alpha^{p_2}$ par $a \alpha (b)_{p_1 + p_2 - 2}$, où $(b)_{p_1 + p_2 - 2}$ représente un ensemble déterminé de conditions pour b équivalent à $p_1 + p_2 - 2$ conditions simples. En second lieu on transforme $c^{r_1} \gamma^{r_2}$ en $c \gamma (bd)_{r_1 + r_2 - 2}$, où $(bd)_{r_1 + r_2 - 2}$ désigne un ensemble déterminé de conditions pour la figure (bd) équivalent à $r_1 + r_2 - 2$ conditions simples. Et enfin, en se débarrassant des points a, α sur b et des plans c, γ par b , on réduit $(a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s)_{12}$ au nombre des figures (bd) représenté par $[(b)_{p_1 + p_2 - 2} (bd)_{r_1 + r_2 - 2} b^q d^s]_8$. La première transformation s'effectue à l'aide des identités bien simples

$$\begin{aligned} a^4 \alpha^4 &= a \alpha B, & a^4 \alpha^2 &= a \alpha b_a b, & a^3 \alpha^3 &= a \alpha b_b^2, & a^3 \alpha &= a \alpha b_b, & a^2 \alpha &= a \alpha b, \\ a^4 \alpha^3 &= a \alpha b_a b_b, & a^4 \alpha &= a \alpha b_a, & a^3 \alpha^2 &= a \alpha b_b b, & a^2 \alpha^2 &= a \alpha b^2, & a \alpha &= a \alpha. \end{aligned}$$

Et pour la seconde on a recours aux formules

$$\begin{aligned} c^2 \gamma \nu_7 &= c \gamma (b + d) \nu_7 \\ c^3 \gamma \nu_6 &= c \gamma (2bd + b_d) \nu_6 \\ c^2 \gamma^2 \nu_6 &= c \gamma (b + d)^2 \nu_6 \\ &\dots \end{aligned}$$

qui sont les corrélatives de celles de 5β . A titre d'exemple nous calculons

$$\begin{aligned}
 (\alpha^3 \alpha^2 b c^3 \gamma^2 d)_{12} &= [b_b b^2 (b + d)(2bd + b_a)d]_8 \\
 &= 2b_b b^4 d^2 + 2b_b b^3 d^3 + b_b b_a b^3 d + b_b b_a b^2 d^2 \\
 &= 6 + 6 + 0 + 1 = 13.
 \end{aligned}$$

Ainsi l'on trouve les 267 nombres du tableau suivant:

Nombres $(\alpha^{n_1} \alpha^{n_2} b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s) = (p_1 p_2 q r_1 r_2 s)$

(440220)=1	(411330)=4	(321330)=12	(311412)= 5
(440211)=1	(411321)=4	(321321)=13	(311331)=16
(440112)=1	(411312)=2	(321312)= 7	(311322)=10
(431220)=1	(411222)=3	(321222)=10	(311313)= 3
(431211)=1	(411213)=1	(321213)= 4	(311223)= 5
(431112)=1	(410430)=4	(321114)= 1	(311214)= 1
(430320)=2	(410421)=2	(320520)= 5	(310530)=10
(430311)=2	(410331)=4	(320511)= 5	(310521)= 5
(430221)=3	(410322)=2	(320430)=14	(310440)=16
(430212)=2	(410223)=1	(320421)=12	(310431)=12
(430113)=1	(332220)=2	(320412)= 5	(310422)= 5
(422220)=1	(332211)=2	(320331)=16	(310332)= 8
(422211)=1	(332112)=2	(320322)=10	(310323)= 3
(422112)=1	(331320)=4	(320313)= 3	(310224)= 1
(421320)=2	(331311)=4	(320223)= 5	(224220)= 5
(421311)=2	(331221)=6	(320214)= 1	(224211)= 5
(421221)=3	(331212)=4	(314220)= 3	(224112)= 5
(421212)=2	(331113)=2	(314211)= 3	(223320)=10
(421113)=1	(330420)=5	(314112)= 3	(223311)=10
(420420)=2	(330411)=5	(313320)= 6	(223221)=15
(420411)=2	(330330)=8	(313311)= 6	(223212)=10
(420330)=4	(330321)=9	(313221)= 9	(223113)= 5
(420321)=4	(330312)=5	(313212)= 6	(222420)=12
(420312)=2	(330222)=7	(313113)= 3	(222411)=12
(420222)=3	(330213)=3	(312420)= 7	(222330)=20
(420213)=1	(330114)=1	(312411)= 7	(222321)=22
(413220)=1	(323220)=3	(312330)=12	(222312)=12
(413211)=1	(323211)=3	(312321)=13	(222222)=17
(413112)=1	(323112)=3	(312312)= 7	(222213)= 7
(412320)=2	(322320)=6	(312222)=10	(222114)= 2
(412311)=2	(322311)=6	(312213)= 4	(221520)=10
(412221)=3	(322221)=9	(312114)= 1	(221511)=10
(412212)=2	(322212)=6	(311520)= 5	(221430)=24
(412113)=1	(322113)=3	(311511)= 5	(221421)=22
(411420)=2	(321420)=7	(311430)=14	(221412)=10
(411411)=2	(321411)=7	(311421)=12	(221331)=28

(221322)=18	(213213)= 7	(210432)=11	(112611)= 5
(221313)= 6	(213114)= 2	(210423)= 3	(112530)=20
(221223)= 9	(212520)=10	(210333)= 5	(112521)=15
(221214)= 2	(212511)=10	(210324)= 1	(112512)= 5
(220620)= 5	(212430)=24	(116220)= 5	(112440)=29
(220611)= 5	(212421)=22	(116211)= 5	(112431)=25
(220530)=20	(212412)=10	(116112)= 5	(112422)=13
(220521)=15	(212331)=28	(115320)=10	(112413)= 3
(220512)= 5	(212322)=18	(115311)=10	(112332)=17
(220440)=29	(212313)= 6	(115221)=15	(112323)= 7
(220431)=25	(212223)= 9	(115212)=10	(112314)= 1
(220422)=13	(212214)= 2	(115113)= 5	(112224)= 2
(220413)= 3	(211620)= 5	(114420)=12	(111630)=10
(220332)=17	(211611)= 5	(114411)=12	(111621)= 5
(220323)= 7	(211530)=20	(114330)=20	(111540)=25
(220314)= 1	(211521)=15	(114321)=22	(111531)=15
(220224)= 2	(211512)= 5	(114312)=12	(111522)= 5
(215220)= 5	(211440)=29	(114222)=17	(111441)=21
(215211)= 5	(211431)=25	(114213)= 7	(111432)=11
(215112)= 5	(211422)=13	(114114)= 2	(111423)= 3
(214320)=10	(211413)= 3	(113520)=10	(111333)= 5
(214311)=10	(211332)=17	(113511)=10	(111324)= 1
(214221)=15	(211323)= 7	(113430)=24	(110640)=15
(214212)=10	(211314)= 1	(113421)=22	(110631)= 5
(214113)= 5	(211224)= 2	(113412)=10	(110550)=25
(213420)=12	(210630)=10	(113331)=28	(110541)=15
(213411)=12	(210621)= 5	(113322)=18	(110532)= 5
(213330)=20	(210540)=25	(113313)= 6	(110442)= 9
(213321)=22	(210531)=15	(113223)= 9	(110433)= 3
(213312)=12	(210522)= 5	(113214)= 2	(110334)= 1
(213222)=17	(210441)=21	(112620)= 5	

L'emploi des formules pour la transformation de $e^{r_1} \gamma^{r_2}$ devient de plus en plus laborieux à mesure que r_1 et r_2 augmentent. Nous remarquons donc qu'on peut éviter ces formules dans les cas ($r_1=6$), ($r_1=5, s=2$), ($r_1=4, s=3$) ($r_1=3, s=4$) et en un grand nombre d'autres cas. D'ailleurs pour $s=4$ on peut recourir avec succès à l'espace tridimensionnel ordinaire. Et enfin un épargnement de travail découle de l'observation très simple que d'après la réduction des facteurs $\alpha^{p_1}, \alpha^{p_2}$ les nombres $(2, 2, q, r_1, r_2, s)$, $[2, 1, q+1, r_1, r_2, s]$, $[1, 1, q+2, r_1, r_2, s]$ sont égaux.

A l'aide de ce premier tableau on trouve immédiatement le tableau suivant :

Nombres $a^{p_1+p_2}b^qc^{r_1+r_2}d^s = (pqrs)$.

(8040) = 105	(5151) = 1900	(4044) = 42	(2622) = 5
(8031) = 105	(5142) = 665	(3540) = 45	(2550) = 100
(8022) = 35	(5133) = 135	(3531) = 45	(2541) = 85
(7140) = 105	(5124) = 10	(3522) = 15	(2532) = 30
(7131) = 105	(5070) = 6650	(3450) = 300	(2523) = 5
(7122) = 35	(5061) = 4050	(3441) = 255	(2460) = 380
(7050) = 700	(5052) = 1350	(3432) = 90	(2451) = 280
(7041) = 595	(5043) = 285	(3423) = 15	(2442) = 99
(7032) = 210	(5034) = 30	(3360) = 1140	(2433) = 21
(7023) = 35	(4440) = 81	(3351) = 840	(2424) = 2
(6240) = 105	(4431) = 81	(3342) = 297	(2370) = 1050
(6231) = 105	(4422) = 27	(3333) = 63	(2361) = 670
(6222) = 35	(4350) = 540	(3324) = 6	(2352) = 230
(6150) = 700	(4341) = 459	(3270) = 3150	(2343) = 51
(6141) = 595	(4332) = 162	(3261) = 2010	(2334) = 6
(6132) = 210	(4323) = 27	(3252) = 690	(2280) = 2275
(6123) = 35	(4260) = 2040	(3243) = 153	(2271) = 1225
(6060) = 2600	(4251) = 1500	(3234) = 18	(2262) = 395
(6051) = 1900	(4242) = 529	(3180) = 6825	(2253) = 85
(6042) = 665	(4233) = 111	(3171) = 3675	(2244) = 10
(6033) = 135	(4224) = 10	(3162) = 1185	(2190) = 3990
(6024) = 10	(4170) = 5530	(3153) = 255	(2181) = 1715
(5340) = 105	(4161) = 3490	(3144) = 30	(2172) = 490
(5331) = 105	(4152) = 1190	(3090) = 11970	(2163) = 95
(5322) = 35	(4143) = 261	(3081) = 5145	(2154) = 10
(5250) = 700	(4134) = 30	(3072) = 1470	(2,0,10,0) = 6300
(5241) = 595	(4080) = 11305	(3063) = 285	(2091) = 2310
(5232) = 210	(4071) = 5775	(3054) = 30	(2082) = 595
(5223) = 35	(4062) = 1805	(2640) = 15	(2073) = 105
(5160) = 2600	(4053) = 375	(2631) = 15	(2064) = 10

6. Les nombres des dégénéralions ξ et η d'un système simplement infini de coniques.

Dans l'espace E_4 la conique peut satisfaire à onze conditions simples, en d'autres termes en E_4 la conique est une figure à onze dimensions. En effet, en E_4 le plan de la conique peut satisfaire à six conditions simples, tandis qu'en son plan la conique elle-même est déterminée par cinq conditions simples. On obtient donc un système simplement infini de coniques en imposant à cette figure à onze dimensions un système de conditions équivalant à dix conditions simples.

Chez les coniques il faut distinguer trois conditions simples; nous les représentons par a_2 , b_2 , c , la première étant en rapport avec un espace donné D comme a , la seconde avec un plan donné C comme b et la troisième ne différant guère de la condition ordinaire c . Par a_2 nous indiquons que les deux points d'intersection de la conique avec un espace donné D coïncident, de manière que cet espace est espace tangent de la conique, tandis que b_2 et c expriment respectivement que le plan donné C contient un point de la conique et la droite donnée B un point du plan de la conique. Donc le suffixe 2 de a_2 et b_2 rappelle que le sujet de la condition, ici la conique, est quadratique au lieu de linéaire. A présent il s'agit donc des systèmes de coniques que nous désignons par le symbole $(a_2{}^p b_2{}^q c{}^r)_{10}$, ou en forme plus condensée par ${}_2(p, q, r)_{10}$.

Un système simplement infini de coniques admet un nombre fini de chacune des deux dégénérationes, la dégénération ξ de l'équation ponctuelle dont les points forment deux droites b, β qui se coupent, et les tangentes un faisceau de rayons compté deux fois (le faisceau des droites par le point d'intersection a de b, β dans le plan c par b, β), et la dégénération η de l'équation tangentielle dont les tangentes forment deux faisceaux de rayons situés dans un même plan c et les points une droite comptée deux fois (le rayon commun des deux faisceaux qui en réunit les sommets a, α). Car chacune de ces deux dégénérationes est une figure à dix dimensions.

Pour les dégénérationes ξ et η l'ensemble de conditions $(a_2{}^p b_2{}^q c{}^r)_{10}$ se transforme respectivement en $(a{}^p b{}^q \beta{}^r c{}^r)_{10}$ et $(\alpha{}^p \alpha{}^q b{}^q c{}^r)_{10}$ dont nous avons évalué les nombres en 5β et 5α . Cependant il y a une différence à signaler entre les nombres $(pq_1 q_2 r)$ et $(p_1 p_2 qr)$ déduits plus haut, et les nombres (ξpqr) et (ηpqr) des dégénérationes ξ et η comprises dans le système $(a_2{}^p b_2{}^q c{}^r)_{10}$ de coniques. S'il s'agit des figures $(ab\beta c)_{10}$, $(\alpha ab c)_{10}$ dégagées de toute connexion avec un système de coniques dont elles peuvent faire partie, il va sans dire que chaque figure satisfaisant à l'ensemble de conditions $(a{}^p b{}^q c{}^r)_{10}$ ne compte qu'une fois parmi les solutions du problème qu'on s'est proposé à résoudre. Au contraire, s'il s'agit de figures ξ, η faisant partie d'un système simplement infini de coniques, il faut qu'on se place à deux points de vue différents, à mesure qu'on cherche les nombres ξ_c, η_c des coniques satisfaisant à un des ensembles (ξpqr) , (ηpqr) , ou bien les nombres ξ_a, η_a des dégénérationes ξ, η satisfaisant à l'ensemble ${}_2(pqr)$. En effet on a $\xi_c = 2^p \xi_a$ et $\eta_c = 2^q \eta_a$. Car chaque solution ξ_a du second cas représente 2^p coniques coïncidées satisfaisant à (ξpqr) , parce que chacun des p espaces donnés figure pour deux espaces tangents coïncidés, de manière que la

figure ξ_a remplit 2^p fois la condition (ξpqr) . Et de même chaque solution η_a du second cas représente 2^q coniques coïncidées satisfaisant à (ηpqr) , chacun des q plans donnés passant par deux points coïncidés de η , de manière que la figure η_a remplit 2^q fois la condition (ηpqr) . La déduction du nombre des coniques $(a_2^p b_2^q c^r)_{11}$ à l'aide des nombres ξ et η exige que nous nous plaçons au premier point de vue; donc pour préparer cette déduction qui nous occupera tout-à-l'heure, nous répétons ici les résultats des numéros 5 β et 5 α , eu égard aux facteurs 2^p et 2^q .

Nombres $\xi a^p b^q c^r = (\xi pqr)$.

(460) = 160	(352) = 680	(253) = 920	(163) = 1340	(073) = 1050
(451) = 160	(343) = 408	(244) = 396	(154) = 560	(064) = 380
(442) = 160	(334) = 168	(235) = 120	(145) = 170	(055) = 100
(433) = 96	(325) = 40	(226) = 20	(136) = 30	(046) = 15
(424) = 32	(280) = 2380	(190) = 4620	(0, 10, 0) = 6300	
(370) = 840	(271) = 1960	(181) = 3430	(091) = 3990	
(361) = 760	(262) = 1580	(172) = 2450	(082) = 2275	

Nombres $\eta a^p b^q c^r = (\eta pqr)$.

(802) = 35	(604) = 80	(442) = 432	(352) = 480	(262) = 320
(712) = 70	(532) = 280	(433) = 432	(343) = 480	(253) = 320
(703) = 70	(523) = 280	(424) = 256	(334) = 288	(244) = 192
(622) = 140	(514) = 160	(415) = 100	(325) = 120	(235) = 80
(613) = 70	(505) = 50	(406) = 15	(316) = 15	(226) = 20

7. Les nombres des coniques $(a_2^p b_2^q c^r)_{11}$.

Pour un système simplement infini de coniques en E_4 on a les deux relations générales

$$\begin{aligned} 2 b_2 &= \eta + a_2 + 2 c, \\ 2 a_2 &= \xi + b_2. \end{aligned}$$

On les démontre de la manière suivante :

Considérons d'abord dans un espace donné D un faisceau de plans dont une droite quelconque donnée B de D soit l'axe, et faisons correspondre l'un à l'autre deux plans C_1 , C_2 de ce faisceau qui passent par les deux points d'intersection de D avec une même conique du système donné. Cette correspondance est caractérisée par la propriété qu'on trouve b_2 plans C_2 correspondant à un plan

C_1 donné et réciproquement b_2 plans C_1 correspondant à un plan C_2 donné, b_2 représentant le nombre des coniques du système dont un plan donné contient un point. D'après le principe de correspondance de CHASLES le nombre des coïncidences de cette correspondance est donc $2b_2$. Mais d'un autre côté, en parcourant la courbe gauche de l'ordre b_2 qui forme l'intersection de D avec le lieu des coniques du système, on y trouve trois catégories de points qui caractérisent une coïncidence, d'abord les η points d'intersection de D avec les dégénérationes η du système, ensuite les a_2 points de contact de D avec des coniques du système, et enfin les $2c$ points d'intersection de D avec les c coniques du système dont les plans s'appuient sur l'axe B du faisceau de plans. Donc on trouve $2b_2 = \eta + a_2 + 2c$.

Considérons ensuite le faisceau d'espaces dont un plan donné C est le plan de base, et faisons correspondre l'un à l'autre deux espaces D_1, D_2 de ce faisceau qui touchent une même conique du système donné. Dans cette correspondance on trouve a_2 espaces D_2 correspondant à un espace D_1 donné et réciproquement; donc le principe de correspondance exige qu'il y ait un nombre $2a_2$ de coïncidences. Et il est évident que ces coïncidences dérivent des dégénérationes ξ du système et des b_2 coniques dont un point se trouve dans le plan de base C . Donc on a $2a_2 = \xi + b_2$ ¹⁾.

Les relations que nous venons de trouver, nous donnent les formules de récurrence

$$\begin{aligned} 3a_2 &= 2\xi + \eta + 2c, \\ 3b_2 &= \xi + 2\eta + 4c. \end{aligned}$$

En les multipliant par $a_2^p b_2^q c^{r-1}$, où $p + q + r = 11$, on obtient des équations qui expriment les nombres $(a_2^{p+1} b_2^q c^{r-1})$, $(a_2^p b_2^{q+1} c^{r-1})$ en $(a_2^p b_2^q c^r)$ et les quantités connues $\xi a^p b^q c^{r-1}$, $\eta a^p b^q c^{r-1}$. Donc elles nous permettent de trouver tous les nombres $(a_2^p b_2^q c^r)$, où l'on a $p + q + r = 11$. Ainsi l'on a pour $(a_2^3 b_2^4 c^4)$:

$$\begin{aligned} 3(a_2^3 b_2^4 c^4) &= 2(\xi 244) + (\eta 244) + 2(a_2^2 b_2^4 c^5) = 792 + 192 + 2(a_2^2 b_2^4 c^5), \\ 3(a_2^2 b_2^4 c^5) &= 2(\xi 145) + (\eta 145) + 2(a_2 b_2^4 c^6) = 340 + 0 + 2(a_2 b_2^4 c^6), \\ 3(a_2 b_2^4 c^6) &= 2(\xi 046) + (\eta 046) + 2(b_2^4 c^7) = 30 + 0 + 0, \end{aligned}$$

d'où l'on dérive ²⁾

¹⁾ Ici le lieu des points de contact des coniques du système donné avec les espaces du faisceau est une courbe tordue de l'ordre $a_2 + b_2$; car un espace D quelconque par le plan de base C en contient a_2 points en dehors de C et b_2 points en C .

²⁾ On peut aussi terminer par $(a_2 b_2^4 c^6)$, tous les nombres $(a_2^p b_2^q c^6)$, où $p + q = 5$, étant connus.

$$(a_2 b_2^4 c^6) = 10, \quad (a_2^2 b_2^4 c^5) = 120, \quad (a_2^3 b_2^4 c^4) = 408.$$

Nous donnons les résultats dans une forme qui permet de contrôler les calculs en faisant suivre au symbole $(a_2^p b_2^q c^r)$ ou ${}_2(pqr)_{10}$ sous les entêtes a_2, b_2, c, ξ, η les nombres des coniques du système simplement infini $(a_2^p b_2^q c^r)$ qui satisfont à une condition a_2, b_2, c de plus ou qui en forment les dégénération ξ, η , c'est-à-dire les nombres $(a_2^{p+1} b_2^q c^r)_{11}, (a_2^p b_2^{q+1} c^r)_{11}, (a_2^p b_2^q c^{r+1})_{11}, (\xi pqr), (\eta pqr)$.

Nombres des coniques satisfaisant à onze conditions simples.

${}_2(pqr)$	a_2	b_2	c	ξ	η	${}_2(pqr)$	a_2	b_2	c	ξ	η
(10,0,0)	20	40	30	0	0	(370)	2400	3960	2760	840	0
(910)	40	80	60	0	0	(361)	1760	2760	1880	760	0
(901)	30	60	45	0	0	(352)	1280	1880	1000	680	480
(820)	80	160	120	0	0	(343)	704	1000	408	408	480
(811)	60	120	90	0	0	(334)	288	408	120	168	288
(802)	45	90	50	0	35	(325)	80	120	20	40	120
(730)	160	320	240	0	0	(316)	10	20	0	0	15
(721)	120	240	180	0	0	(280)	3960	5540	3560	2380	0
(712)	90	180	100	0	70	(271)	2760	3560	2180	1960	0
(703)	50	100	40	0	70	(262)	1880	2180	1080	1580	320
(640)	320	640	480	0	0	(253)	1000	1080	420	920	320
(631)	240	480	360	0	0	(244)	408	420	120	396	192
(622)	180	360	200	0	140	(235)	120	120	20	120	80
(613)	100	200	80	0	70	(226)	20	20	0	20	20
(604)	40	80	20	0	80	(190)	5540	6460	3690	4620	0
(550)	640	1280	960	0	0	(181)	3560	3690	1910	3430	0
(541)	480	960	720	0	0	(172)	2180	1910	820	2450	0
(532)	360	720	400	0	280	(163)	1080	820	280	1340	0
(523)	200	400	160	0	280	(154)	420	280	70	560	0
(514)	80	160	40	0	160	(145)	120	70	10	170	0
(505)	20	40	5	0	50	(136)	20	10	0	30	0
(460)	1280	2400	1760	160	0	(0,10,0)	6460	6620	3390	6300	0
(451)	960	1760	1280	160	0	(091)	3690	3390	1545	3990	0
(442)	720	1280	704	160	432	(082)	1910	1545	590	2275	0
(433)	400	704	288	96	432	(073)	820	590	180	1050	0
(424)	160	288	80	32	256	(064)	280	180	40	380	0
(415)	40	80	10	0	100	(055)	70	40	5	100	0
(406)	5	10	0	0	15	(046)	10	5	0	5	0

8. Les nombres des dégénération ϕ, ψ, χ d'un système simplement infini de quadriques.

Dans l'espace E_4 la quadrique est une figure à treize dimensions. Car l'espace D de la quadrique peut satisfaire à quatre conditions simples, et dans son espace D la quadrique elle-même se détermine par neuf conditions simples. On obtient donc un système simplement infini en imposant à la quadrique un ensemble de conditions équivalant à douze conditions simples.

Chez les quadriques nous distinguons quatre conditions simples a_2, b_2, c_2, d . Par a_2 et b_2 nous indiquons respectivement qu'un espace donné et un plan donné sont espace tangent et plan tangent de la quadrique, ce qui implique que la quadrique est coupée par l'espace donné suivant une conique dégénérée en deux droites et par le plan donné en deux points infiniment voisins l'un de l'autre. Et c_2 et d expriment respectivement qu'une droite donnée contient un point de la quadrique et qu'un point donné appartient à l'espace de la quadrique. Nous nous occupons donc du système de quadriques représenté par le symbole $(a_2^p b_2^q c_2^r d^s)_{12}$ ou en forme raccourcie par ${}_2(p, q, r, s)$.

Un système simplement infini de quadriques admet un nombre fini de chacune des trois dégénération ϕ, ψ, χ déterminées par douze conditions simples dont la première admet un point double, la seconde une droite double et la troisième un plan double ¹⁾. La dégénération ϕ est un cône quadratique; ce cône est déterminé, si l'on connaît le sommet, trois autres points de l'espace du cône et cinq génératrices, ce qui démontre qu'il admet $4 + 3 + 5 = 12$ dimensions. La dégénération ψ se compose d'une droite double portant à la fois deux plans et deux points; donc elle est déterminée par $6 + 2.2 + 2.1 = 12$ conditions simples. La dégénération χ consiste d'une quadrique infiniment aplatie réduite à un plan double situé dans un espace déterminé et portant une conique; donc χ est déterminée par $6 + 1 + 5 = 12$ conditions simples. Nous cherchons successivement les nombres des dégénération ϕ, ψ, χ compris en ${}_2(p, q, r, s)_{12}$.

$\alpha) \dots$ Nombres $(\phi p q r s)_{12}$.

Pour évaluer le nombre des cônes $(\phi p q r s)_{12}$ nous répétons pour

¹⁾ Dans son „Kalkül der abzählenden Geometrie” SCHUBERT indique les surfaces à point, à droite et à plan double par χ, ψ, ϕ en ordre renversé.

les cônes les raisonnements des numéros 6) et 7) par rapport aux coniques.

Un système simplement infini de cônes représenté par $(\Phi p q r s)_{11}$ admet un nombre fini de chacune des deux dégénération, la dégénération $x = (a^p b^q c^{r_1+r_2} d^s)_{11}$ et la dégénération $y = (a^p b^{q_1+q_2} c^r d^s)$. Tandis que le cône $(\Phi p q r s)_{12}$ est sa propre figure corrélatrice, ces deux dégénération x et y dont la seconde a été étudiée en 5d, sont les figures corrélatrices l'une de l'autre. Donc les nombres des dégénération x et y sont connus.

Pour le système simplement infini $(\Phi p q r s)_{11}$ on a les deux relations générales:

$$\begin{aligned} 2c_2 &= y + b_2 + 2d, \\ 2b_2 &= x + c_2 + 2a. \end{aligned}$$

Pour démontrer la première nous considérons un faisceau de rayons dont un point donné A et un plan C passant par ce point sont le sommet et le support, et nous faisons correspondre l'un à l'autre deux rayons de ce faisceau qui passent par les deux points d'intersection du plan C avec un même cône du système. Ainsi nous faisons naître entre les rayons de ce faisceau une correspondance (c_2, c_2) qui admet donc $2c_2$ coïncidences. Mais d'un autre côté, en parcourant la courbe de l'ordre c_2 en C , qui est le lieu des points d'intersection de C avec les cônes Φ du système considéré, on trouve trois groupes de points qui caractérisent une coïncidence, d'abord les y points d'intersection avec des droites doubles de dégénération y , ensuite les b_2 points de contact de c avec des cônes ϕ du système et enfin les d couples de points d'intersection de C avec des cônes Φ dont l'espace passe par A , couples de points en ligne droite avec A . Donc on trouve $2c_2 = y + b_2 + 2d$. Et la seconde relation se déduit de la première à l'aide des raisonnements corrélatifs.

Des deux relations que nous venons de prouver, on déduit

$$\begin{aligned} 3b_2 &= 2x + y + 4a + 2d, \\ 3c_2 &= x + 2y + 2a + 4d. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations par $a^p b_2^q c_2^r d^s$, où $p + q + r + s = 11$, on voit qu'elles font connaître les deux nombres ${}_2(p, q + 1, r, s)$, ${}_2(p, q, r + 1, s)$, aussitôt que les deux autres ${}_2(p + 1, q, r, s)$, ${}_2(p, q, r, s + 1)$ sont connus. En remarquant :

1° que les nombres ${}_2(p q r s)$ disparaissent pour $p > 4$ ou $s > 4$,

2° que les nombres ${}_2(pqrs)$, où $p = s = 4$, s'annulent tout de même, parce qu'en général le point A déterminé par a^i ne se trouve pas dans l'espace D déterminé par d^i ,

3° qu'en égard à la corrélation on a ${}_2(pqrs) = {}_2(srqp)$, il est évident qu'on peut dériver successivement

les nombres (4..3) et (3..4) des nombres (5..3) et (4..4),
 „ „ (4..2) „ (2..4) „ „ (5..2) „ (4..3),
 „ „ (4..1) „ (1..4) „ „ (5..1) „ (4..2),
 „ „ (4..0) „ (0..4) „ „ (5..0) „ (4..1),
 „ „ (3..3) „ „ (4..3) „ (3..4),
 „ „ (3..2) et (2..3) „ „ (4..2) „ (3..3),
 „ „ (3..1) „ (1..3) „ „ (4..1) „ (3..2),
 „ „ (3..0) „ (0..3) „ „ (4..0) „ (3..1),
 „ „ (2..2) „ „ (3..2) „ (2..3),
 „ „ (2..1) et (1..2) „ „ (3..1) „ (2..2),
 „ „ (2..0) „ (0..2) „ „ (3..0) „ (2..1),
 „ „ (1..1) „ „ (2..1) „ (1..2),
 „ „ (1..0) et (0..1) „ „ (2..0) „ (1..1),
 „ „ (0..0) „ „ (1..0) „ (0..1).

Toutefois, en suivant ce procédé, il faut qu'on y fasse attention que dans les formules de réduction, d'après la remarque générale faite dans le cas des coniques (numéro 6, alinéa 4), chaque dégénération x_d compte pour 2^q quadriques x_q , chaque dégénération y_d compte pour 2^r quadriques y_q , tandis que dans ce même ordre d'idées chaque cône $(\Phi p q r s)_{12}$ d'après sa nature particulière compte pour 2^p quadriques du système satisfaisant aux conditions posées. En d'autres termes la quadrique forme l'unité dans laquelle sont exprimés les nombres a, b_2, c_2, d, x, y des deux formules de réduction.

Ainsi l'on trouve le tableau suivant qui permet de contrôler les relations de récurrence qui y ont mené:

Nombres des cônes satisfaisant à douze conditions simples.

$(\Phi p q r s)_{11}$	a	b_2	c_2	d	x	y
(4601)	0	6	12	4	0	10
(4511)	0	12	24	8	0	20
(4502)	0	4	8	1	0	10
(4421)	0	24	48	16	0	40
(4412)	0	8	16	2	0	20
(4403)	0	1	2	0	0	3

$(\Phi p q r s)_{11}$	a	b_2	c_2	d	x	y
(4331)	0	48	72	24	24	48
(4322)	0	16	24	4	8	24
(4313)	0	2	4	0	0	6
(4241)	0	72	76	24	68	32
(4232)	0	24	24	4	24	16
(4223)	0	4	4	0	4	4
(3701)	6	73	134	45	0	105
(3611)	12	134	244	82	0	190
(3602)	4	45	82	12	0	95
(3521)	24	244	440	148	0	340
(3512)	8	82	148	22	0	170
(3503)	1	12	22	1	0	30
(3431)	48	440	640	216	144	408
(3422)	16	148	216	40	48	204
(3413)	2	22	40	2	0	54
(3404)	0	1	2	0	0	3
(3341)	72	640	728	240	408	336
(3332)	24	216	240	48	144	168
(3323)	4	40	48	4	24	48
(3314)	0	2	4	0	0	6
(3251)	76	728	644	200	660	160
(3242)	24	240	200	40	232	80
(2801)	73	477	808	272	0	595
(2711)	134	808	1348	454	0	980
(2702)	45	272	454	73	0	490
(2621)	244	1348	2208	744	0	1580
(2612)	82	454	744	122	0	790
(2603)	12	73	128	8	0	155
(2531)	440	2208	3056	1032	480	1840
(2522)	148	744	1032	200	160	920
(2513)	22	122	200	14	0	250
(2504)	1	8	14	0	0	20
(2441)	640	3056	3472	1152	1360	1584
(2432)	216	1032	1152	240	480	792
(2414)	2	14	24	0	0	34
(2351)	728	3472	3248	1032	2240	960
(2261)	644	3248	2528	744	2680	320
(1901)	477	2160	3366	1131	0	2310
(1811)	272	1131	1718	295	0	1715
(1721)	1348	5116	7536	2528	0	4900
(1712)	454	1718	2528	444	0	2450

$(\Phi p q r s)_{11}$	a	b_2	c_2	d	x	y
(1703)	73	295	444	34	0	525
(1631)	2208	7536	9696	3248	960	5360
(1613)	122	444	644	52	0	740
(1604)	8	34	52	0	0	70
(1541)	3056	9696	10560	3472	2720	4480
(1514)	14	52	76	0	0	100
(0,10,0,1)	2160	7240	10160	3390	0	6300
(0911)	3366	10160	13588	4518	0	7980
(0902)	1131	3390	4518	828	0	3990
(0821)	5116	13588	16944	5600	0	9100
(0812)	1718	4518	5600	1066	0	4550
(0803)	295	828	1066	92	0	1120
(0731)	7536	16944	18816	6144	0	8400
(0722)	2528	5600	6144	1244	0	4200
(0713)	444	1066	1244	116	0	1190
(0704)	34	92	116	0	0	140
(0641)	9696	18816	18240	5792	0	6080
(0632)	3248	6144	5792	1200	0	3040
(0623)	644	1244	1200	128	0	900
(0614)	52	116	128	0	0	140
(0551)	10560	18240	15360	4640	0	3200
(0542)	3472	5792	4640	944	0	1600
(0533)	728	1200	944	104	0	480
(0524)	76	128	104	0	0	80
(0461)	9696	15360	11328	3168	0	960
(0452)	3056	4640	3168	608	0	480
(0443)	640	944	608	64	0	144
(0434)	72	104	64	0	0	24

Les nombres $(\Phi a^r b_2^q c_2^r d^h)$ ont été trouvés par SCHUBERT. Et la relation générale

$$(\Phi p q r s) = (\Phi s r q p)$$

qui découle de la remarque qu'en E_4 le cône Φ est sa propre figure corrélatrice, peut servir à contrôler les autres résultats.

$\beta)$ Nombres $(\Psi p q r s)_{12}$.

Les nombres $(\Psi p q r s)_{12}$ figurent dans le dernier tableau de 5), la dégénération $(\Psi p q r s)_{12}$ ne différant guère de la figure $(a\alpha b\gamma c\delta)_{12}$ étudiée en 5 ϵ .

$\gamma) \dots$ Nombres $(\chi p q r s)_{12}$.

Les nombres $(\chi p q r s)_{12}$ se déduisent des nombres ${}_2(p q r)$ de 7) à l'aide des formules générales

$$\begin{aligned}(\chi a_2^p b_2^q c^r d)_{12} &= (a_2^p b_2^q c^r)_{11}, \dots p + q + r = 11, \\(\chi a_2^p b_2^q c^r d^2)_{12} &= (a_2^p b_2^q c^{r+1})_{11}, \dots p + q + r = 10, \\(\chi a_2^p b_2^q c^r d^3)_{12} &= (a_2^p b_2^q c^r c_c)_{11}, \dots p + q + r = 9, \\(\chi a_2^p b_2^q c^r d^4)_{12} &= (a_2^p b_2^q c^r c_d)_{11}, \dots p + q + r = 8.\end{aligned}$$

Ainsi dans les cas $s = 1$ et $s = 2$ les nombres $(\chi p q r s)$ ont été trouvés. Et en vertu des relations

$$\begin{aligned}5c^3c_c &= 3c^5, & 5c^4c_c &= 3c^6, \\5c^2c_d &= c^5, & 5c^3c_d &= c^6\end{aligned}$$

dont nous nous sommes déjà servis en 5γ et en 5δ , les cas

$$(s = 3, r = 3), \quad (s = 3, r = 4), \quad (s = 4, r = 2), \quad (s = 4, r = 3)$$

se ramènent aussi à des nombres ${}_2(p q r)$. Parce qu'évidemment les nombres $(\chi p q r s)$ disparaissent dans les deux couples de suppositions

$$(s = 3, r > 4), \quad (s = 4, r > 3),$$

il nous reste à étudier les cinq cas

$$(s = 3, r < 3), \quad (s = 4, r < 2).$$

Nous avons donc à chercher les nombres de coniques

$$\begin{aligned}(a_2^p b_2^q c_c)_{11}, \dots p + q &= 9, \\(a_2^p b_2^q c c_c)_{11}, \quad (a_2^p b_2^q c_d)_{11}, \dots p + q &= 8, \\(a_2^p b_2^q c^2 c_c)_{11}, \quad (a_2^p b_2^q c c_d)_{11}, \dots p + q &= 7.\end{aligned}$$

Si les nombres des dégénérationes ξ, η des systèmes simplement infinis

$$\begin{aligned}(a_2^p b_2^q c_c)_{10}, \dots p + q &= 8, \\(a_2^p b_2^q c c_c)_{10}, \quad (a_2^p b_2^q c_d)_{10}, \dots p + q &= 7, \\(a_2^p b_2^q c^2 c_c)_{10}, \quad (a_2^p b_2^q c c_d)_{10}, \dots p + q &= 6\end{aligned}$$

ont été trouvés, les relations récurrentes

$$\begin{aligned} 3 a_2 &= 2 \xi + \eta + 2 c, \\ 3 b_2 &= \xi + 2\eta + 4 c \end{aligned}$$

de 7) nous permettent de déduire les nombres $(a_2^p b_2^q c^2 c_c)$, $(a_2^p b_2^q c c_d)_{11}$ des nombres connus $(a_2^p b_2^q c^3 c_c)_{11}$, $(a_2^p b_2^q c^2 c_d)_{11}$, les nombres $(a_2^p b_2^q c c_c)_{11}$, $(a_2^p b_2^q c_d)_{11}$ des nombres $(a_2^p b_2^q c^2 c_c)_{11}$, $(a_2^p b_2^q c c_d)_{11}$, etc. Seulement nous pouvons nous épargner la peine de compléter les tableaux des nombres ξ et η de 6) en appliquant directement les équations que nous venons de citer aux systèmes simplement infinis $(\chi p q r s)_{11}$ des dégénéralions χ . Car tous les nombres $(\xi p q r s)_{11}$ et $(\eta p q r s)_{11}$ sont connus. En effet, on a

$$(\xi p q r s)_{11} = (a^p b^q c^r d^s)_{11}, \quad (\eta p q r s)_{11} = (a^p b^q c^r d^s)_{11},$$

de manière que les nombres $(\xi p q r s)_{11}$ figurent dans le dernier tableau de 5 δ et les nombres $(\eta p q r s)_{11}$ dans le dernier tableau de 5 γ . Donc, au moyen des relations récurrentes que nous venons d'indiquer, on déduit successivement

$$\begin{aligned} \text{les nombres } (\chi a_2^p b_2^q c^2 d^3)_{12} & \text{ des nombres } (\chi a_2^p b_2^q c^3 d^3)_{12}, \\ \text{,, ,, } (\chi a_2^p b_2^q c d^3)_{12} & \text{ ,, ,, } (\chi a_2^p b_2^q c^2 d^3)_{12}, \\ \text{,, ,, } (\chi a_2^p b_2^q d^3)_{12} & \text{ ,, ,, } (\chi a_2^p b_2^q c d^3)_{12} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \text{les nombres } (\chi a_2^p b_2^q c d^4)_{12} & \text{ des nombres } (\chi a_2^p b_2^q c^2 d^4)_{12} \\ \text{et ,, ,, } (\chi a_2^p b_2^q d^4)_{12} & \text{ ,, ,, } (\chi a_2^p b_2^q c d^4)_{12}. \end{aligned}$$

Nous donnons les nombres $(\chi p q r s)_{12}$ en deux tableaux qui impient l'un sur l'autre; le premier contient tous les nombres $(\chi p q r s)_{12}$ qu'on déduit immédiatement des nombres ${}_2(p q r)$ de 7), l'autre permet de contrôler les relations de récurrence qui y ont mené.

Nombres $(\chi p q r s)_{12}$.

(11,0,0,1)= 20	(8121)= 90	(6411)= 480	(5331)= 400
(10,1,0,1)= 40	(8031)= 50	(6321)= 360	(5241)= 160
(10,0,1,1)= 30	(7401)= 320	(6231)= 200	(5151)= 40
(9201)= 80	(7311)= 240	(6141)= 80	(5061)= 5
(9111)= 60	(7221)= 180	(6051)= 20	(4701)= 2400
(9021)= 45	(7131)= 100	(5601)= 1280	(4611)= 1760
(8301)= 160	(7041)= 40	(5511)= 960	(4521)= 1280
(8211)= 120	(6501)= 640	(5421)= 720	(4431)= 704

(4341) = 288	(0831) = 590	(4422) = 704	(0552) = 5
(4251) = 80	(0741) = 180	(4332) = 288	(6033) = 12
(4161) = 10	(0651) = 40	(4242) = 80	(5133) = 24
(3801) = 3960	(0561) = 5	(4152) = 10	(4233) = 48
(3711) = 2760	(10,0,0,2) = 30	(3702) = 2760	(3333) = 72
(3621) = 1880	(9102) = 60	(3612) = 1880	(2433) = 72
(3531) = 1000	(9012) = 45	(3522) = 1000	(1533) = 42
(3441) = 408	(8202) = 120	(3432) = 408	(0633) = 24
(3351) = 120	(8112) = 90	(3342) = 120	(5043) = 3
(3261) = 20	(8022) = 50	(3252) = 20	(4143) = 6
(2901) = 5540	(7302) = 240	(2802) = 3560	(3243) = 12
(2811) = 3560	(7212) = 180	(2712) = 2180	(2343) = 12
(2721) = 2180	(7122) = 100	(2622) = 1080	(1443) = 6
(2631) = 1080	(7032) = 40	(2532) = 420	(0543) = 3
(2541) = 420	(6402) = 480	(2442) = 120	(6024) = 4
(2451) = 120	(6312) = 360	(2352) = 20	(5124) = 8
(2361) = 20	(6222) = 200	(1902) = 3690	(4224) = 16
(1,10,0,1) = 6460	(6132) = 80	(1812) = 1910	(3324) = 24
(1911) = 3690	(6042) = 20	(1722) = 820	(2424) = 24
(1821) = 1910	(5502) = 960	(1632) = 280	(1524) = 14
(1731) = 820	(5412) = 720	(1542) = 70	(0624) = 8
(1641) = 280	(5322) = 400	(1452) = 10	(5034) = 1
(1551) = 70	(5232) = 160	(0,10,0,2) = 3390	(4134) = 2
(1461) = 10	(5142) = 40	(0912) = 1545	(3234) = 4
(0,11,0,1) = 6620	(5052) = 5	(0822) = 590	(2334) = 4
(0,10,1,1) = 3390	(4602) = 1760	(0732) = 180	(1434) = 2
(0921) = 1545	(4512) = 1280	(0642) = 40	(0534) = 1

$(\chi p q r s)_{A_1}$	a_2	b_2	c	ξ	η
(8003)	18	36	27	0	0
(7103)	36	72	54	0	0
(7013)	27	54	23	0	35
(6203)	72	144	108	0	0
(6113)	54	108	46	0	70
(6023)	23	46	12	0	45
(5303)	144	288	216	0	0
(5213)	108	216	92	0	140
(5123)	46	92	24	0	90
(5033)	12	24	3	0	30
(4403)	288	528	384	48	0
(4313)	216	384	168	48	216
(4223)	92	168	48	16	148

$(\chi p q r s)_{11}$	a_2	b_2	c	ξ	η
(4133)	24	48	6	0	60
(4043)	3	6	0	0	9
(3503)	528	816	552	240	0
(3413)	384	552	240	216	240
(3323)	168	240	72	96	168
(3233)	48	72	12	24	72
(3143)	6	12	0	0	18
(2603)	816	1012	604	620	0
(2513)	552	604	248	500	160
(2423)	240	248	72	232	112
(2333)	72	72	12	72	48
(2243)	12	12	0	12	12
(1703)	1012	974	468	1050	0
(1613)	604	468	166	740	0
(1523)	248	166	42	330	0
(1433)	72	42	6	102	0
(1343)	12	6	0	18	0
(0803)	974	828	341	1120	0
(0713)	468	341	107	595	0
(0623)	166	107	24	225	0
(0533)	42	24	3	60	0
(0443)	6	3	0	9	0
(7004)	4	8	6	0	0
(6104)	8	16	12	0	0
(6014)	6	12	4	0	10
(5204)	16	32	24	0	0
(5114)	12	24	8	0	20
(5024)	4	8	1	0	10
(4304)	32	64	48	0	0
(4214)	24	48	16	0	40
(4124)	8	16	2	0	20
(4034)	1	2	0	0	3
(3404)	64	104	72	24	0
(3314)	48	72	24	24	48
(3224)	16	24	4	8	24
(3134)	2	4	0	0	6
(2504)	104	128	76	80	0
(2414)	72	76	24	68	32
(2324)	24	24	4	24	16
(2234)	4	4	0	4	4
(1604)	128	116	52	140	0

$(\chi p q r s)_{11}$	a_2	b_2	c	ξ	η
(1514)	76	52	14	0	100
(1424)	24	14	2	34	0
(1334)	4	2	0	6	0
(0704)	116	92	34	140	0
(0614)	52	34	8	70	0
(0524)	14	8	1	20	0
(0434)	2	1	0	3	0

Les nombres $(\chi a_2^p b_2^q c_2^r d^s)_{12}$ des coniques en E_3 ont été trouvés par SCHUBERT.

9. Les nombres des quadriques $(a_2^p b_2^q c_2^r d^s)_{12}$.

Pour un système simplement infini de quadriques en E_4 on a les trois relations

$$\begin{aligned} 2c_2 &= \chi + 2d_2 + b_2, \\ 2b_2 &= \psi + c_2 + a_2, \\ 2a_2 &= \phi + b_2; \end{aligned}$$

on les démontre de la manière suivante:

Considérons d'abord dans un plan donné C un faisceau de rayons à sommet A et faisons correspondre l'un à l'autre deux rayons B_1, B_2 de ce faisceau qui passent par les deux points d'intersection de C avec une même quadrique du système donné. Ainsi nous engendrons entre les rayons de ce faisceau une correspondance (c_2, c_2) , chaque rayon de ce faisceau rencontrant c_2 quadriques du système donné; donc il y a $2c_2$ coïncidences. Sur la courbe de l'ordre c_2 qui est en C le lieu des points d'intersection avec les quadriques du système, nous trouvons trois groupes de points caractérisant une coïncidence, les χ points d'intersection de C avec les plans doubles des dégénérationes χ , les b_2 points de contact avec les quadriques qui touchent le plan C , et les $2d_2$ points d'intersection de C avec les quadriques dont les espaces contiennent le sommet S du faisceau. Donc $2c_2 = \chi + b_2 + 2d_2$.

Considérons ensuite dans un espace donné D un faisceau de plans dont une droite B de D soit l'axe et faisons correspondre l'un à l'autre deux plans C_1, C_2 de ce faisceau qui touchent une même quadrique du système donné. Cela revient à dire qu'entre les plans

C_1, C_2 il existe une correspondance (b_2, b_2) . Sur la courbe gauche qui forme en D le lieu des points d'intersection avec les quadriques du système, on retrouve les $2b_2$ coïncidences de cette correspondance dans les ψ intersections avec les droites doubles des dégénéralions ψ , les a_2 points de contact de D avec des quadriques du système et les c_2 points d'intersection de B avec des quadriques du système. Donc $2b_2 = \psi + a_2 + c_2$.

Considérons enfin le faisceau d'espaces dont un plan donné C est le plan de base, et faisons correspondre l'un à l'autre deux espaces D_1, D_2 qui touchent une même quadrique du système donné. Alors les $2a_2$ coïncidences de cette correspondance (a_2, a_2) dérivent des cônes ϕ du système et des b_2 quadriques qui touchent le plan C . Donc $2a_2 = \phi + b_2$ ¹⁾.

Les relations que nous venons de démontrer, nous donnent

$$\begin{aligned} 4a_2 &= 3\phi + 2\psi + \chi + 2d_2, \\ 4b_2 &= 2\phi + 4\psi + 2\chi + 4d_2, \\ 4c_2 &= \phi + 2\psi + 3\chi + 6d_2, \end{aligned}$$

où nous conservons le facteur 2 dans la seconde équation pour faire ressortir à quel titre ces trois équations peuvent être regardées comme une extension naturelle des deux équations

$$\begin{aligned} 3a_2 &= 2\xi + \eta + 2c, \\ 3b_2 &= \xi + 2\eta + 4c, \end{aligned}$$

du numéro 7). En les multipliant par $a_2^p b_2^q c_2^r d_2^{s-1}$, où $p + q + r + s = 13$, on voit qu'elles expriment les trois nombres $(a_2^{p+1} b_2^q c_2^r d_2^{s-1})$, $(a_2^p b_2^{q+1} c_2^r d_2^{s-1})$, $(a_2^p b_2^q c_2^{r+1} d_2^{s-1})$ en $(a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s)$ et les quantités connues ϕ, ψ, χ . Donc elles nous permettent de trouver tous les nombres $a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s$, où $p + q + r + s = 13$. Seulement, parce que les nombres ϕ_q, ψ_q, χ_q de ces équations sont exprimées en quadriques comme unité et que les valeurs trouvées pour $(\phi p q r s)_{11}, (\psi p q r s)_{11}, (\chi p q r s)_{11}$ se rapportent aux dégénéralions ϕ_d, ψ_d, χ_d comme unités, il faut qu'on y fasse attention qu'on a $\phi_q = 2^p \phi_d, \psi_q = 2^q \psi_d, \chi_q = 2^r \chi_d$.

¹⁾ Ici la courbe gauche qui figure dans la déduction de la deuxième formule de réduction, est de l'ordre b_2 , tandis que dans la figure qui mène à la troisième formule de réduction, le lieu des points de contact des espaces D par C avec les quadriques du système est une courbe tordue de l'ordre $a_2 + b_2$, chaque espace D par C en contenant a_2 points hors de C et b_2 points en C .

Pour l'évaluation du nombre de quadriques représenté par (4621) on trouve ainsi, en employant quatre fois de suite la seconde des trois formules, avec une notation transparente

$$\begin{aligned} 2(4621) &= (\phi + 2\psi + \chi)(4521) + 2(4522), \\ 2(4522) &= (\phi + 2\psi + \chi)(4422) + 2(4423), \\ 2(4423) &= (\phi + 2\psi + \chi)(4323) + 2(4324), \\ 2(4324) &= (\phi + 2\psi + \chi)(4224); \end{aligned}$$

car (4225) disparaît ¹⁾. Cela donne immédiatement

$$2(4621) = (\phi + 2\psi + \chi)[(4521) + (4422) + (4323) + (4224)],$$

ou

$$\begin{aligned} 2(4621) &= 2^4(24 + 16 + 4 + 0) + 2(0 + 2^4 \cdot 27 + 2^3 \cdot 27 + 2^2 \cdot 10) \\ &\quad + 2^2(1280 + 704 + 168 + 16) = 10752. \end{aligned}$$

Ainsi l'on peut construire le tableau des nombres $(pqrs)_{13}$. Pour épargner de l'espace nous avons divisé ce tableau en deux parties. La première partie, se rapportant aux cas $s = 0$, $s = 1$, $s = 2$, ne donne que les résultats, la seconde partie $s = 3$, $s = 4$ permet d'en contrôler les relations mutuelles.

Nombres des quadriques satisfaisant à treize conditions simples.

(13,0,0,0) = 5	(9220) = 180	(7330) = 1080	(5800) = 1280
(12,1,0,0) = 10	(9130) = 270	(7240) = 1620	(5710) = 1920
(12,0,1,0) = 15	(9040) = 405	(7150) = 2220	(5620) = 2880
(11,2,0,0) = 20	(8500) = 160	(7060) = 2630	(5530) = 4320
(11,1,1,0) = 30	(8410) = 240	(6700) = 640	(5440) = 6480
(11,0,2,0) = 45	(8320) = 360	(6610) = 960	(5350) = 8880
(10,3,0,0) = 40	(8230) = 540	(6520) = 1440	(5260) = 10520
(10,2,1,0) = 60	(8140) = 810	(6430) = 2160	(5170) = 10580
(10,1,2,0) = 90	(8050) = 1110	(6340) = 3240	(5080) = 9220
(10,0,3,0) = 135	(7600) = 320	(6250) = 4440	(4900) = 2496
(9400) = 80	(7510) = 480	(6160) = 5260	(4810) = 3712
(9310) = 120	(7420) = 720	(6070) = 5290	(4720) = 5504

¹⁾ On peut diminuer le travail en supprimant la dernière des quatre équations. Car les nombres $(pqrs)$, où $p + q + r = 9$, sont les nombres des quadriques satisfaisant dans l'espace ordinaire à neuf conditions simples. Seulement nous préférons de faire ressortir que ces nombres qu'on pourrait déduire d'une étude antérieure (voir SCHUBERT „Kalkül” pp. 104—105), s'obtiennent ici à l'aide des formules générales.

(4630) = 8128	(0,11,2,0) = 22600	(5251) = 6080
(4540) = 11936	(0,10,3,0) = 26080	(5161) = 5320
(4450) = 16096	(0940) = 28416	(5071) = 3930
(4360) = 18992	(0850) = 28800	(4801) = 2464
(4270) = 19304	(0760) = 26880	(4711) = 3648
(4180) = 16968	(0670) = 23040	(4621) = 5376
(4090) = 13411	(0580) = 18240	(4531) = 7872
(3,10,0,0) = 4560	(0490) = 13536	(4441) = 10128
(3910) = 6624	(0,3,10,0) = 9600	(4351) = 10944
(3820) = 9536	(0,2,11,0) = 6580	(4261) = 9808
(3730) = 13568	(0,1,12,0) = 4390	(4171) = 7316
(3640) = 19008	(0,0,13,0) = 2865	(4081) = 4927
(3550) = 24640	(12,0,0,1) = 10	(3901) = 4344
(3460) = 28384	(11,1,0,1) = 20	(3811) = 6224
(3370) = 28656	(11,0,1,1) = 30	(3721) = 8800
(3280) = 25408	(10,2,0,1) = 40	(3631) = 12224
(3190) = 20198	(10,1,1,1) = 60	(3541) = 15136
(3,0,10,0) = 15015	(10,0,2,1) = 90	(3451) = 16064
(2,11,0,0) = 7560	(9301) = 80	(3361) = 14464
(2,10,1,0) = 10560	(9211) = 120	(3271) = 11080
(2920) = 14496	(9121) = 180	(3181) = 7494
(2830) = 19456	(9031) = 270	(3091) = 4916
(2740) = 25344	(8401) = 160	(2,10,0,1) = 6780
(2650) = 30720	(8311) = 240	(2911) = 9216
(2560) = 33600	(8221) = 360	(2821) = 12208
(2470) = 32736	(8131) = 540	(2731) = 15616
(2380) = 28416	(8041) = 705	(2641) = 18048
(2290) = 22324	(7501) = 320	(2551) = 18240
(2,1,10,0) = 16470	(7411) = 480	(2461) = 15936
(2,0,11,0) = 11625	(7321) = 720	(2371) = 12048
(1,12,0,0) = 11200	(7231) = 1080	(2281) = 8116
(1,11,1,0) = 14840	(7141) = 1410	(2191) = 5308
(1,10,2,0) = 19120	(7051) = 1520	(2,0,10,1) = 3390
(1930) = 23744	(6601) = 640	(1,11,0,1) = 9240
(1840) = 28032	(6511) = 960	(1,10,1,1) = 11700
(1750) = 30720	(6421) = 1440	(1921) = 14184
(1660) = 30720	(6331) = 2160	(1831) = 16160
(1570) = 27840	(6241) = 2820	(1741) = 16704
(1480) = 22944	(6151) = 3040	(1651) = 15360
(1390) = 17472	(6061) = 2660	(1561) = 12480
(1,2,10,0) = 12620	(5701) = 1280	(1471) = 9024
(1,1,11,0) = 8770	(5611) = 1920	(1381) = 6000
(1,0,12,0) = 5915	(5521) = 2880	(1291) = 3884
(0,13,0,0) = 14960	(5431) = 4320	(1,1,10,1) = 2460
(0,12,1,0) = 18714	(5341) = 5640	(1,0,11,1) = 1530

(0,12,0,1)=11240	(6232)= 940	(2542)= 5856
(0,11,1,1)=13240	(6142)= 990	(2452)= 4896
(0,10,2,1)=14780	(6052)= 820	(2362)= 3440
(0931)=15376	(5602)= 640	(2272)= 2092
(0841)=14592	(5512)= 960	(2182)= 1250
(0751)=12480	(5422)= 1440	(2092)= 736
(0661)= 9600	(5332)= 1880	(1,10,0,2)= 3850
(0571)= 6720	(5242)= 1980	(1912)= 4644
(0481)= 4416	(5152)= 1640	(1822)= 5248
(0391)= 2832	(5062)= 1110	(1732)= 5344
(0,2,10,1)= 1780	(4702)= 1216	(1642)= 4768
(0,1,11,1)= 1100	(4612)= 1792	(1552)= 3680
(0,0,12,1)= 670	(4522)= 2624	(1462)= 2464
(11,0,0,2)= 10	(4432)= 3376	(1372)= 1488
(10,1,0,2)= 20	(4342)= 3576	(1282)= 884
(10,0,1,2)= 30	(4252)= 3056	(1192)= 518
(9202)= 40	(4162)= 2092	(1,0,10,2)= 300
(9112)= 60	(4072)= 1269	(0,11,0,2)= 4310
(9022)= 90	(3802)= 2072	(0,10,1,2)= 4770
(8302)= 80	(3712)= 2928	(0922)= 4896
(8212)= 120	(3622)= 4064	(0832)= 4544
(8122)= 180	(3532)= 5024	(0742)= 3744
(8032)= 235	(3442)= 5232	(0652)= 2720
(7402)= 160	(3352)= 4512	(0562)= 1760
(7312)= 240	(3262)= 3208	(0472)= 1056
(7222)= 360	(3172)= 1954	(0382)= 624
(7132)= 470	(3082)= 1169	(0292)= 364
(7042)= 495	(2902)= 3056	(0,1,10,2)= 200
(6502)= 320	(2812)= 4040	(0,0,11,2)= 120
(6412)= 480	(2722)= 5152	
(6322)= 720	(2632)= 5920	

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d	Φ	Ψ	χ
(9003)	5	10	15	1	0	0	18
(8103)	10	20	30	2	0	0	36
(8013)	15	30	45	3	0	0	54
(7203)	20	40	60	4	0	0	72
(7113)	30	60	90	6	0	0	108
(7023)	45	90	100	9	0	35	92
(6303)	40	80	120	8	0	0	144
(6213)	60	120	180	12	0	0	216

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d	ϕ	ψ	χ
(6123)	90	180	200	18	0	70	184
(6033)	100	200	165	17	0	135	96
(5403)	80	160	240	16	0	0	288
(5313)	120	240	360	24	0	0	432
(5223)	180	360	400	36	0	140	368
(5133)	200	400	330	34	0	270	192
(5043)	165	330	210	21	0	285	45
(4503)	160	304	448	32	16	0	528
(4413)	240	448	656	48	32	0	768
(4323)	360	656	736	72	64	216	672
(4233)	400	736	628	68	64	444	384
(4143)	330	628	404	42	32	522	96
(4053)	210	404	223	16	16	375	0
(3603)	304	512	720	56	96	0	816
(3513)	448	720	992	80	176	0	1104
(3423)	656	992	1088	112	320	240	960
(3333)	736	1088	936	104	384	504	576
(3243)	628	936	632	68	320	612	192
(3153)	404	632	350	34	176	510	0
(3063)	223	350	192	17	96	285	0
(2703)	512	732	952	80	292	0	1012
(2613)	720	952	1184	104	488	0	1208
(2523)	992	1184	1216	128	800	160	992
(2433)	1088	1216	1008	112	960	336	576
(2343)	936	1008	672	72	864	408	192
(2253)	632	672	372	36	592	340	0
(2163)	350	372	204	18	328	190	0
(2073)	192	204	111	9	180	105	0
(1803)	732	874	1016	92	590	0	974
(1713)	952	1016	1080	104	888	0	936
(1623)	1184	1080	976	104	1288	0	664
(1533)	1216	976	736	80	1456	0	336
(1443)	1008	736	464	48	1280	0	96
(1353)	672	464	256	24	880	0	0
(1263)	372	256	140	12	488	0	0
(1173)	204	140	76	6	268	0	0
(1083)	111	76	41	3	146	0	0
(0903)	874	920	966	92	828	0	828
(0813)	1016	966	916	92	1066	0	682
(0723)	1080	916	752	80	1244	0	428
(0633)	976	752	528	56	1200	0	192

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d	ϕ	ψ	χ
(0543)	736	528	320	32	944	0	48
(0453)	464	320	176	16	608	0	0
(0363)	256	176	96	8	336	0	0
(0273)	140	96	52	4	184	0	0
(0183)	76	52	28	2	100	0	0
(0093)	41	28	15	1	54	0	0

10. Les nombres des dégénéralions $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ d'un système simplement infini d'hyperquadriques.

Dans son espace E_4 l'hyperquadrique est une figure à quatorze dimensions ¹⁾. On obtient donc un système simplement infini d'hyperquadriques en imposant à cette figure un ensemble de conditions équivalant à treize conditions simples.

Chez les hyperquadriques il faut distinguer quatre conditions simples a_2, b_2, c_2, d_2 . Par a_2, b_2, c_2 nous indiquons respectivement qu'un espace donné D , un plan donné C , une droite donnée B touchent l'hyperquadrique, ce qui implique que l'hyperquadrique est coupée par l'espace D suivant un cône, par le plan C suivant deux droites (réelles ou imaginaires), par la droite B en deux points coïncidés; tandis que d_2 exprime qu'un point donné A fasse partie de l'hyperquadrique. Ainsi nous nous occuperons des systèmes d'hyperquadriques représentés par le symbole $(a_2''b_2''c_2''d_2'')_{11}$, ou, en forme plus condensée, par ${}_2(pqrs)_{14}$.

Un système simplement infini d'hyperquadriques admet un nombre fini de chacune des dégénéralions $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ caractérisées respectivement par la possession d'un point, d'une droite, d'un plan, d'un

¹⁾ On démontre qu'une hyperquadrique est déterminée par 14 points en faisant voir qu'il y a une hyperquadrique (et une seule) qui passe par un point quelconque et par deux quadriques situées en deux espaces différents et coupant le plan d'intersection de ces espaces suivant la même conique.

Comme le démontre le nombre des coefficients de l'équation correspondante les nombres 5, 9, 14, etc... de points qui déterminent une conique, une quadrique, une hyperquadrique, etc., représentent en même temps les nombres de dimensions d'une conique, d'une cubique plane, d'une quartique plane, etc. En désignant la série de ces nombres par u_2, u_3, u_4 , etc. on a, en général, comme le prouve la déduction géométrique indiquée plus haut, la relation récurrente $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1$.

espace doubles. La dégénération κ est un hypercône quadrique; cet hypercône est déterminé, si l'on connaît le sommet et neuf points, ce qui fait voir qu'il admet $4 + 9 = 13$ dimensions. La dégénération λ se compose des droites qui s'appuient sur une droite et une conique données, la droite croisant le plan de la conique. Elle a pour espaces tangents les espaces qui contiennent un de deux points déterminés de la droite donnée qui en forme la droite double; de manière qu'elle est déterminée, si l'on connaît la droite double, cinq points et les deux points singuliers sur la droite double, ce qui démontre qu'elle est une figure de $6 + 5 + 2 = 13$ dimensions. La dégénération μ est en E_4 la figure corrélatrice de λ ; ses points sont distribués en deux espaces qui se coupent suivant un plan portant une conique touchée par tous ses espaces tangents. Et la dégénération ν est de la même manière la figure corrélatrice de κ et donc une quadrique dont l'espace support forme l'espace double de la dégénération.

A cause de la corrélation les nombres $(\kappa p q r s)_{13}$ et $(\lambda p q r s)_{13}$ sont respectivement égaux à $(\nu s r q p)_{13}$ et $(\mu s r q p)_{13}$. Cette remarque facilite la détermination des nombres des dégénération.

α). . . . Les nombres κ et ν .

Les nombres $(\nu p q r s)_{13}$ ont été donnés dans le tableau précédent.

β). . . . Les nombres λ et μ .

Les nombres $(\mu p q r s)_{13}$ ne diffèrent de zéro que pour $1 < s < 9$. Et les nombres $(\mu p q r s)_{13}$ qui ne disparaissent pas, se déduisent des nombres $(\chi p q r s)_{12}$ de 8γ et des nombres de coniques ${}_2(p q r)_{11}$ de 7).

Si nous désignons le nombre $(\mu a_2^p b_2^q c_2^r d^s \delta^t)_{13}$, où d et δ représentent les deux espaces de la dégénération μ , par $(\mu p q r s t)$ et que nous supprimons les indices 2 et 11 de ${}_2(p q r)_{11}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} (\mu p q r 2) &= (\mu p q r 11) = (p q r), \\ (\mu p q r 3) &= 3(\mu p q r 21) = 3(\chi p q r 2) = 3(p, q, r + 1), \\ (\mu p q r 4) &= 4(\mu p q r 31) + 3(\mu p q r 22) = 4(\chi p q r 3) + 3(p, q, r + 2), \\ (\mu p q r 5) &= 5(\mu p q r 41) + 10(\mu p q r 32) = 5(\chi p q r 4) + 10(p, q, r + 1)c_c, \\ (\mu p q r 6) &= 15(\mu p q r 42) + 10(\mu p q r 33) = 15(p, q, r + 1)c_c + 10(p q r)c_c^2, \\ (\mu p q r 7) &= 35(\mu p q r 43) = 35(p q r)c_c c_d, \\ (\mu p q r 8) &= 35(\mu p q r 44) = 35(p q r)c_d^2. \end{aligned}$$

A l'aide des formules générales du premier alinéa de 8γ on a d'abord :

$$(\mu pqr5) = 5 (\chi pqr4) + 10 (\chi p, q, r+1, 3),$$

ce qui démontre que les nombres $(\mu pqr5)$ sont connus, tout aussi bien que les nombres $(\mu pqr2)$, $(\mu pqr3)$, $(\mu pqr4)$.

D'un autre côté, en exprimant $(\mu pqr s)$, où $s = 5, 6, 7, 8$, à l'aide des mêmes formules générales de 8γ par les nombres ${}_2(pqr)_{11}$, on trouve la relation

$$\begin{aligned} (\mu pqr8) &= (\mu p, q, r+1, 7) = (\mu p, q, r+2, 6) = \\ &= (\mu p, q, r+3, 5). \end{aligned}$$

Car on a pour $p+q+r=5$

$$\begin{aligned} (\mu pqr8) &= 35 (pqr) c_d^2, \\ (\mu p, q, r+1, 7) &= 35 (pqr) c c_c c_d, \\ (\mu p, q, r+2, 6) &= 15 (pqr) c^3 c_d + 10 (pqr) c^2 c_c^2, \\ (\mu p, q, r+3, 5) &= 5 (pqr) c^3 c_d + 10 (pqr) c^4 c_c; \end{aligned}$$

tandis que les relations du numéro 2) donnent en effet

$$7c_d^2 = 7c c_c c_d = 3c^3 c_d + 2c^2 c_c^2 = c^3 c_d + 2c^4 c_c = 7C.$$

D'après les indications que nous venons de donner, on construit sans peine le tableau des nombres $(\mu pqr s)_{13}$.

Tableau des nombres $(\mu pqr s)_{13}$.

$(11,0,0,2) = 20$	$(8212) = 120$	$(7303) = 720$	$(7015) = 260$
$(10,1,0,2) = 40$	$(8203) = 360$	$(7222) = 180$	$(7006) = 260$
$(10,0,1,2) = 30$	$(8122) = 90$	$(7213) = 540$	$(6502) = 640$
$(10,0,0,3) = 90$	$(8113) = 270$	$(7204) = 828$	$(6412) = 480$
$(9202) = 80$	$(8104) = 414$	$(7132) = 100$	$(6403) = 1440$
$(9112) = 60$	$(8032) = 50$	$(7123) = 300$	$(6322) = 300$
$(9103) = 180$	$(8023) = 150$	$(7114) = 516$	$(6313) = 1080$
$(9022) = 45$	$(8014) = 258$	$(7105) = 580$	$(6304) = 1656$
$(9013) = 135$	$(8005) = 290$	$(7042) = 40$	$(6232) = 200$
$(9004) = 207$	$(7402) = 320$	$(7033) = 120$	$(6223) = 610$
$(8302) = 160$	$(7312) = 240$	$(7024) = 212$	$(6214) = 1032$

(6205)=1160	(4504)=5952	(3253)=60	(1633)=715
(6142)=80	(4432)=704	(3244)=108	(1624)=1505
(6133)=240	(4423)=2112	(3235)=140	(1615)=1920
(6124)=424	(4414)=3648	(3226)=140	(1606)=1920
(6115)=520	(4405)=4160	(3217)=140	(1552)=70
(6106)=520	(4342)=288	(3208)=140	(1543)=210
(6052)=20	(4333)=864	(2902)=5540	(1534)=378
(6043)=60	(4324)=1536	(2812)=3560	(1525)=490
(6034)=108	(4315)=1920	(2803)=10680	(1516)=490
(6025)=140	(4306)=1920	(2722)=2180	(1507)=490
(6016)=140	(4252)=80	(2713)=6540	(1462)=10
(6007)=140	(4243)=240	(2704)=10908	(1453)=30
(5602)=1280	(4234)=432	(2632)=1080	(1444)=54
(5512)=960	(4225)=560	(2623)=3240	(1435)=70
(5503)=2880	(4216)=560	(2614)=5656	(1426)=70
(5422)=720	(4207)=560	(2605)=6680	(1417)=70
(5413)=2160	(4162)=10	(2542)=420	(1408)=70
(5404)=3312	(4153)=30	(2533)=1260	(0,11,0,2)=6620
(5332)=400	(4144)=54	(2524)=2252	(0,10,1,2)=3390
(5323)=1200	(4135)=70	(2515)=2860	(0,10,0,3)=10170
(5314)=2064	(4126)=70	(2506)=2860	(0922)=1545
(5305)=2320	(4117)=70	(2452)=120	(0913)=485
(5242)=160	(4108)=70	(2443)=360	(0904)=7947
(5233)=480	(3802)=3960	(2434)=648	(0832)=590
(5224)=848	(3712)=2760	(2425)=840	(0823)=1770
(5215)=1040	(3703)=8280	(2416)=840	(0814)=2634
(5206)=1040	(3622)=1880	(2407)=840	(0805)=3770
(5152)=40	(3613)=4140	(2362)=20	(0742)=180
(5143)=120	(3604)=8904	(2353)=60	(0733)=540
(5134)=216	(3532)=1000	(2344)=108	(0724)=1218
(5125)=280	(3523)=3000	(2335)=140	(0715)=1240
(5116)=280	(3514)=5208	(2326)=140	(0706)=1240
(5107)=280	(3505)=6040	(2317)=140	(0652)=40
(5062)=5	(3442)=408	(2308)=140	(0643)=120
(5053)=15	(3433)=1224	(1,10,0,2)=6460	(0634)=216
(5044)=27	(3424)=2184	(1912)=3690	(0625)=280
(5035)=35	(3415)=2760	(1903)=11070	(0616)=280
(5026)=35	(3406)=2760	(1822)=1910	(0607)=280
(5017)=35	(3352)=120	(1813)=5230	(0562)=5
(5008)=35	(3343)=360	(1804)=9626	(0553)=15
(4702)=2400	(3334)=648	(1732)=820	(0544)=27
(4612)=1760	(3325)=840	(1723)=210	(0535)=35
(4603)=5280	(3316)=840	(1714)=4332	(0526)=35
(4522)=1280	(3307)=840	(1705)=5260	(0517)=35
(4513)=3840	(3262)=20	(1642)=280	(0508)=35

11. Les nombres des hyperquadriques $(a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s)_{14}$.

Pour un système simplement infini d'hyperquadriques en E_4 on a les quatre relations

$$\begin{aligned} 2d_2 &= \nu + c_2, \\ 2c_2 &= \mu + b_2 + d_2, \\ 2b_2 &= \lambda + a_2 + c_2, \\ 2a_2 &= \kappa + b_2. \end{aligned}$$

Parce qu'en E_4 l'hyperquadrique est sa propre figure corrélative, il faut que cet ensemble de relations se comporte de la même manière. En effet la première et la seconde de ces équations ont respectivement pour corrélative la quatrième et la troisième. Il s'en suit que l'ensemble de ces quatre relations est démontré, aussitôt qu'on ait prouvé le premier couple de ces équations.

Sur une droite quelconque donnée B nous faisons correspondre l'un à l'autre deux points d'intersection avec une même hyperquadrique du système. Évidemment les $2d_2$ points de coïncidence de la correspondance (d_2, d_2) , engendrée de cette manière, se retrouvent dans les ν intersections de B avec les dégénéralions ν à espace double, et dans les c_2 points de contact de B avec des hyperquadriques du système. Donc $2d = \nu + c_2$.

Le point A et le plan C par A étant le sommet et le support d'un faisceau donné de rayons, faisons correspondre l'un à l'autre deux rayons de ce faisceau qui touchent une même hyperquadrique du système. Ainsi nous faisons naître entre les rayons du faisceau une correspondance (c_2, c_2) dont on retrouve facilement les $2c_2$ rayons de coïncidence à l'aide de la courbe de l'ordre $c_2 + d_2$ qui forme en C le lieu des points de contact des hyperquadriques du système avec les rayons du faisceau. Sur cette courbe il y a trois groupes de points caractérisant une coïncidence: les μ points d'intersection de C avec les plans doubles des dégénéralions μ , les b_2 points de contact de C avec des hyperquadriques du système et le point A compté d_2 fois. Donc $2c = \mu + b_2 + d_2$.

Les relations que nous venons de démontrer, nous donnent

$$\begin{aligned} 5a_2 &= 4\kappa + 3\lambda + 2\mu + \nu, \\ 5b_2 &= 3\kappa + 6\lambda + 4\mu + 2\nu, \\ 5c_2 &= 2\kappa + 4\lambda + 6\mu + 3\nu, \\ 5d_2 &= \kappa + 2\lambda + 3\mu + 4\nu. \end{aligned}$$

En les multipliant par $a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s$, où $p + q + r + s = 13$, on voit qu'elles expriment $(a_2^{p+1} b_2^q c_2^r d_2^s)$, $(a_2^p b_2^{q+1} c_2^r d_2^s)$, $(a_2^p b_2^q c_2^{r+1} d_2^s)$, $(a_2^p b_2^q c_2^r d_2^{s+1})$ dans les quantités connues $\kappa, \lambda, \mu, \nu$. Chacune de ces

quatre équations nous permet donc de trouver tous les nombres ${}_2(pqrs)_{14}$, de manière qu'on peut évaluer comme vérification chacun de ces nombres de quatre manières différentes ¹⁾.

Le tableau des nombres ${}_2(pqrs)_{14}$ représentant le but final de nos recherches, nous le donnons dans une forme qui permet de contrôler les relations de dépendance. Pour la dernière fois nous rappelons ici que les nombres $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ qui y entrent, se déduisent des valeurs trouvées en les multipliant respectivement par $2^p, 2^q, 2^r, 2^s$.

A cause de la corrélation chaque ligne de ce tableau donne deux groupes différents de résultats, à mesure qu'on se sert de l'en-tête supérieur ou inférieur. Ainsi la première ligne fait trouver

$$\begin{aligned} (14,0,0,0) &= 1, & (0,0,0,14) &= 1, \\ (13,1,0,0) &= 2, & (0,0,1,13) &= 2, \\ (13,0,1,0) &= 3, & (0,1,0,13) &= 3, \\ (13,0,0,1) &= 4, & (1,0,0,13) &= 4. \end{aligned}$$

Nombres des hyperquadriques satisfaisant à quatorze conditions simples.

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	\varkappa	λ	μ	ν	
(13,0,0,0)	1	2	3	4	0	0	0	5	(0,0,0,13)
(12,1,0,0)	2	4	6	8	0	0	0	10	(0,0,1,12)
(12,0,1,0)	3	6	9	12	0	0	0	15	(0,1,0,12)
(12,0,0,1)	4	8	12	16	0	0	0	20	(1,0,0,12)
(11,2,0,0)	4	8	12	16	0	0	0	20	(0,0,2,11)
(11,1,1,0)	6	12	18	24	0	0	0	30	(0,1,1,11)
(11,1,0,1)	8	16	24	32	0	0	0	40	(1,0,1,11)
(11,0,2,0)	9	18	27	36	0	0	0	45	(0,2,0,11)
(11,0,1,1)	12	24	36	48	0	0	0	60	(1,1,0,11)
(11,0,0,2)	16	32	48	64	0	0	20	40	(2,0,0,11)
(10,3,0,0)	8	16	24	32	0	0	0	40	(0,0,3,10)
(10,2,1,0)	12	24	36	48	0	0	0	60	(0,1,2,10)
(10,2,0,1)	16	32	48	64	0	0	0	80	(1,0,2,10)
(10,1,2,0)	18	36	54	72	0	0	0	90	(0,2,1,10)
(10,1,1,1)	24	48	72	96	0	0	0	120	(1,1,1,10)
(10,1,0,2)	32	64	96	128	0	0	40	80	(2,0,1,10)
(10,0,3,0)	27	54	81	108	0	0	0	135	(0,3,0,10)
(10,0,2,1)	36	72	108	144	0	0	0	180	(1,2,0,10)
(10,0,1,2)	48	96	144	192	0	0	60	120	(2,1,0,10)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	\varkappa	$(pqrs)$

¹⁾ Comme nous l'avons remarqué au début de ce travail ces nombres figurent chez SCHUBERT (*Math. Ann.*, t. 45).

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	κ	λ	μ	ν	
(10,0,0,3)	44	88	132	86	0	0	90	40	(3,0,0,10)
(9400)	16	32	48	64	0	0	0	80	(0049)
(9310)	24	48	72	96	0	0	0	120	(0139)
(9301)	32	64	96	128	0	0	0	160	(1039)
(9220)	36	72	108	144	0	0	0	180	(0229)
(9211)	48	96	144	192	0	0	0	240	(1129)
(9202)	64	128	192	176	0	0	80	160	(2029)
(9130)	54	108	162	216	0	0	0	270	(0319)
(9121)	72	144	216	288	0	0	0	360	(1219)
(9112)	96	192	288	264	0	0	120	240	(2119)
(9103)	88	176	264	172	0	0	180	80	(3019)
(9040)	81	162	243	324	0	0	0	405	(0409)
(9031)	108	216	324	432	0	0	0	540	(1309)
(9022)	144	288	432	396	0	0	180	360	(2209)
(9013)	132	264	396	258	0	0	270	120	(3109)
(9004)	86	172	258	137	0	0	207	16	(4009)
(8500)	32	64	96	128	0	0	0	160	(0058)
(8410)	48	96	144	192	0	0	0	240	(0148)
(8401)	64	128	192	256	0	0	0	320	(1048)
(8320)	72	144	216	288	0	0	0	360	(0238)
(8311)	96	192	288	384	0	0	0	480	(1138)
(8302)	128	256	384	352	0	0	160	320	(2038)
(8230)	108	216	324	432	0	0	0	540	(0328)
(8221)	144	288	432	576	0	0	0	720	(1228)
(8212)	192	384	576	528	0	0	240	480	(2128)
(8203)	176	352	528	344	0	0	360	160	(3028)
(8140)	162	324	486	648	0	0	0	810	(0418)
(8131)	216	432	648	864	0	0	0	1080	(1318)
(8122)	288	576	864	792	0	0	360	720	(2218)
(8113)	264	528	792	516	0	0	540	240	(3118)
(8104)	172	344	516	274	0	0	414	32	(4018)
(8050)	243	486	694	902	0	35	0	1110	(0508)
(8041)	324	648	902	1156	0	70	0	1410	(1408)
(8032)	432	864	1156	1048	0	140	400	940	(2308)
(8023)	396	792	1048	704	0	140	600	360	(3208)
(8014)	258	516	704	376	0	70	516	48	(4108)
(8005)	137	274	376	188	0	35	290	0	(5008)
(7600)	64	128	192	256	0	0	0	320	(0067)
(7510)	96	192	288	384	0	0	0	480	(0157)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	κ	$(pqrs)$

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	κ	λ	μ	ν	
(7501)	128	256	384	512	0	0	0	640	(1057)
(7420)	144	288	432	576	0	0	0	720	(0247)
(7411)	192	384	576	768	0	0	0	960	(1147)
(7402)	256	512	768	704	0	0	320	640	(2047)
(7330)	216	432	648	864	0	0	0	1080	(0337)
(7321)	288	576	864	1152	0	0	0	1440	(1237)
(7312)	384	768	1152	1056	0	0	480	960	(2137)
(7303)	352	704	1056	688	0	0	720	320	(3037)
(7240)	324	648	972	1296	0	0	0	1620	(0427)
(7231)	432	864	1296	1728	0	0	0	2160	(1327)
(7222)	576	1152	1728	1584	0	0	720	1440	(2227)
(7213)	528	1056	1584	1032	0	0	1080	480	(3127)
(7204)	344	688	1032	548	0	0	828	64	(4027)
(7150)	486	972	1388	1804	0	70	0	2220	(0517)
(7141)	648	1296	1804	2312	0	140	0	2820	(1417)
(7132)	864	1728	2312	2096	0	280	800	1880	(2317)
(7123)	792	1584	2096	1408	0	280	1200	720	(3217)
(7114)	516	1032	1408	752	0	140	1032	96	(4117)
(7105)	274	548	752	376	0	70	580	0	(5017)
(7060)	694	1388	1802	2216	0	280	0	2630	(0607)
(7051)	902	1804	2216	2628	0	490	0	3040	(1507)
(7042)	1156	2312	2628	2304	0	840	640	1980	(2407)
(7033)	1048	2096	2304	1552	0	840	960	800	(3307)
(7024)	704	1408	1552	848	0	560	848	144	(4207)
(7015)	376	752	848	424	0	280	520	0	(5107)
(7006)	188	376	424	212	0	140	260	0	(6007)
(6700)	128	256	384	512	0	0	0	640	(0076)
(6610)	192	384	576	768	0	0	0	960	(0166)
(6601)	256	512	768	1024	0	0	0	1280	(1066)
(6520)	288	576	864	1152	0	0	0	1440	(0256)
(6511)	384	768	1152	1536	0	0	0	1920	(1156)
(6502)	512	1024	1536	1408	0	0	640	1280	(2056)
(6430)	432	864	1296	1728	0	0	0	2160	(0346)
(6421)	576	1152	1728	2304	0	0	0	2880	(1246)
(6412)	768	1536	2304	2112	0	0	960	1920	(2146)
(6403)	704	1408	2112	1376	0	0	1440	640	(3046)
(6340)	648	1296	1944	2592	0	0	0	3240	(0436)
(6331)	864	1728	2592	3456	0	0	0	4320	(1336)
(6322)	1152	2304	3456	3168	0	0	1440	2880	(2236)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	κ	$(pqrs)$

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	κ	λ	μ	ν	
(6313)	1056	2112	3168	2064	0	0	2160	960	(3136)
(6304)	688	1376	2064	1096	0	0	1656	128	(4036)
(6250)	972	1944	2776	3608	0	140	0	4440	(0526)
(6241)	1296	2592	3608	4624	0	280	0	5640	(1426)
(6232)	1728	3456	4624	4192	0	560	1600	3760	(2326)
(6223)	1584	3168	4192	2816	0	560	2440	1440	(3226)
(6214)	1032	2064	2816	1504	0	280	2064	192	(4126)
(6205)	548	1096	1504	752	0	140	1160	0	(5026)
(6160)	1388	2776	3604	4432	0	560	0	5260	(0616)
(6151)	1804	3608	4432	5256	0	980	0	6080	(1516)
(6142)	2312	4624	5256	4608	0	1680	1280	3960	(2416)
(6133)	2096	4192	4608	3104	0	1680	1920	1600	(3316)
(6124)	1408	2816	3104	1696	0	1120	1696	288	(4216)
(6115)	752	1504	1696	848	0	560	1040	0	(5116)
(6106)	376	752	848	424	0	280	520	0	(6016)
(6070)	1802	3604	4166	4728	0	240	0	5290	(0706)
(6061)	2216	4432	4728	5024	0	1920	0	5320	(1606)
(6052)	2628	5256	5024	4152	0	2860	640	3280	(2506)
(6043)	2304	4608	4152	2736	0	2760	960	1320	(3406)
(6034)	1552	3104	2736	1504	0	1920	864	272	(4306)
(6025)	848	1696	1504	752	0	1040	560	0	(5206)
(5800)	256	512	768	1024	0	0	0	1280	(0085)
(5710)	384	768	1152	1536	0	0	0	1920	(0175)
(5701)	512	1024	1536	2048	0	0	0	2560	(1075)
(5620)	576	1152	1728	2304	0	0	0	2880	(0265)
(5611)	768	1536	2304	3072	0	0	0	3840	(1165)
(5602)	1024	2048	3072	2816	0	0	1280	2560	(2065)
(5530)	864	1728	2592	3456	0	0	0	4320	(0355)
(5521)	1152	2304	3456	4608	0	0	0	5760	(1255)
(5512)	1536	3072	4608	4224	0	0	1920	3840	(2155)
(5503)	1408	2816	4224	2752	0	0	2880	1280	(3055)
(5440)	1296	2592	3888	5184	0	0	0	6480	(0445)
(5431)	1728	3456	5184	6912	0	0	0	8640	(1345)
(5422)	2304	4608	6912	6336	0	0	2880	5760	(2245)
(5413)	2112	4224	6336	4128	0	0	4320	1920	(3145)
(5404)	1376	2752	4128	2192	0	0	3312	256	(4045)
(5350)	1944	3888	5552	7216	0	280	0	8880	(0535)
(5341)	2592	5184	7216	9248	0	560	0	11280	(1435)
(5332)	3456	6912	9248	8384	0	1120	3200	7520	(2335)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	κ	$(pqrs)$

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	κ	λ	μ	ν	
(5323)	3168	6336	8384	5632	0	1120	4800	2880	(3235)
(5314)	2064	4128	5632	3008	0	560	4128	384	(4135)
(5305)	1096	2192	3008	1504	0	280	2320	0	(5035)
(5260)	2776	5552	7208	8864	0	1120	0	10520	(0625)
(5251)	3608	7216	8864	10512	0	1960	0	12160	(1525)
(5242)	4624	9248	10512	9216	0	3360	2560	7920	(2425)
(5233)	4192	8384	9216	6208	0	3360	3840	3200	(3325)
(5224)	2816	5632	6208	3392	0	2240	3392	576	(4225)
(5215)	1504	3008	3392	1696	0	1120	2080	0	(5125)
(5170)	3604	7208	8332	9456	0	2480	0	10580	(0715)
(5161)	4432	8864	9456	10048	0	3840	0	10640	(1615)
(5152)	5256	10512	10048	8304	0	5720	1280	6560	(2515)
(5143)	4608	9216	8304	5472	0	5520	1920	2640	(3415)
(5134)	3104	6208	5472	3008	0	3840	1728	544	(4315)
(5080)	4166	8332	8628	8924	0	3770	0	9220	(0805)
(5071)	4728	9456	8924	8392	0	5260	0	7860	(1705)
(5062)	5024	10048	8392	6416	0	6680	320	4440	(2605)
(5053)	4152	8304	6416	4048	0	6040	480	1680	(3505)
(5044)	2736	5472	4048	2192	0	4160	432	336	(4405)
(4900)	512	1008	1504	2000	16	0	0	2496	(0094)
(4810)	768	1504	2240	2976	32	0	0	3712	(0184)
(4801)	1024	2000	2976	3952	48	0	0	4928	(1084)
(4720)	1152	2240	3328	4416	64	0	0	5504	(0274)
(4711)	1536	2976	4416	5856	96	0	0	7296	(1174)
(4702)	2048	3952	5856	5360	144	0	2400	4864	(2074)
(4630)	1728	3328	4928	6528	128	0	0	8128	(0364)
(4621)	2304	4416	6528	8640	192	0	0	10752	(1264)
(4612)	3072	5856	8640	7904	288	0	3520	7168	(2164)
(4603)	2816	5360	7904	5168	272	0	5280	2432	(3064)
(4540)	2592	4928	7264	9600	256	0	0	11936	(0454)
(4531)	3456	6528	9600	12672	384	0	0	15744	(1354)
(4522)	4608	8640	12672	11584	576	0	5120	10496	(2254)
(4513)	4224	7904	11584	7584	544	0	7680	3584	(3154)
(4504)	2752	5168	7584	4048	336	0	5952	512	(4054)
(4450)	3888	7264	10208	13152	512	432	0	16096	(0544)
(4441)	5184	9600	13152	16704	768	864	0	20256	(1444)
(4432)	6912	12672	16704	15104	1152	1728	5632	13504	(2344)
(4423)	6336	11584	15104	10176	1088	1728	8448	5248	(3244)
(4414)	4128	7584	10176	5472	672	864	7296	768	(4144)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	κ	$(pqrs)$

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	κ	λ	μ	ν	
(4360)	5552	10208	13136	16064	896	1728	0	18992	(0634)
(4351)	7216	13152	16064	18976	1280	3024	0	21888	(1534)
(4342)	9248	16704	18976	16640	1792	5184	4608	14304	(2434)
(4333)	8384	15104	16640	11264	1664	5184	6912	5888	(3334)
(4324)	5632	10176	11264	6208	1088	3456	6144	1152	(4234)
(4270)	7208	13136	15192	17248	1280	4872	0	19304	(0724)
(4261)	8864	16064	17248	18432	1664	6020	0	19616	(1624)
(4252)	10512	18976	18432	15328	2048	9008	2560	12224	(2524)
(4243)	9216	16640	15328	10176	1792	8736	3840	5024	(3424)
(4180)	8332	15192	15784	16376	1472	5268	0	16968	(0814)
(4171)	9456	17248	16376	15504	1664	8664	0	14632	(1714)
(4162)	10048	18432	15504	11936	1664	11312	640	8368	(2614)
(4153)	8304	15328	11936	7584	1280	10416	960	3232	(3514)
(4090)	8628	15784	14993	14202	1472	7947	0	13411	(0904)
(4081)	8924	16376	14202	12028	1472	9626	0	9854	(1804)
(4072)	8392	15504	12028	8552	960	10908	0	5076	(2704)
(4063)	6416	11936	8552	5168	896	8904	0	1784	(3604)
(3,10,0,0)	1008	1896	2784	3672	120	0	0	4560	(0,0,10,3)
(3910)	1504	2784	4064	5344	224	0	0	6624	(0193)
(3901)	2000	3672	5344	7016	328	0	0	8688	(1093)
(3820)	2240	4064	5888	7712	416	0	0	9536	(0283)
(3811)	2976	5344	7712	10080	608	0	0	12448	(1183)
(3802)	3952	7016	10080	9184	888	0	3960	8288	(2083)
(3730)	3328	5888	8448	11008	768	0	0	13568	(0373)
(3721)	4416	7712	11008	14304	1120	0	0	17600	(1273)
(3712)	5856	10080	14304	13008	1632	0	5520	11712	(2173)
(3703)	5360	9184	13008	8552	1536	0	8280	4096	(3073)
(3640)	4928	8448	11968	15488	1408	0	0	19008	(0463)
(3631)	6528	11008	15488	19968	2048	0	0	24448	(1363)
(3622)	8640	14304	19968	18112	2976	0	7520	16256	(2263)
(3613)	7904	13008	18112	11936	2800	0	8280	5760	(3163)
(3550)	7264	11968	16192	20416	2560	480	0	24640	(0553)
(3541)	9600	15488	20416	25344	3712	960	0	30272	(1453)
(3532)	12672	19968	25344	22720	5376	1920	5000	20096	(2353)
(3523)	11584	18112	22720	15328	5056	1920	12000	7936	(3253)
(3460)	10208	16192	20256	24320	4224	1920	0	28384	(0643)
(3451)	13152	20416	24320	28244	5888	3360	0	32128	(1543)
(3442)	16704	25344	28244	24576	8064	5760	6528	20928	(2443)
(3433)	15104	22720	24576	16640	7488	5760	9792	8704	(3343)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	κ	$(pqrs)$

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	x	λ	μ	ν	
(3370)	13136	20256	23056	25856	6016	4320	0	28656	(0733)
(3361)	16064	24320	25856	27392	7808	5720	0	28928	(1633)
(3352)	18976	28224	27392	22720	9728	10080	3840	18048	(2533)
(3280)	15192	23056	23840	24624	7328	7080	0	25408	(0823)
(3271)	17248	25856	24624	23392	8640	840	0	22160	(1723)
(3262)	18432	27392	23392	18112	9472	12960	1280	12832	(2623)
(3190)	15784	23840	22626	21412	7728	970	0	20198	(0913)
(3181)	16376	24624	21412	18200	8128	10460	0	14988	(1813)
(3172)	15504	23392	18200	13008	7616	13080	0	7816	(2713)
(3,0,10,0)	14993	22626	20089	17552	7360	10170	0	15015	(0,10,0,3)
(3091)	14202	21412	17552	13692	6992	11070	0	9832	(1903)
(3082)	12028	18200	13692	9184	5856	10680	0	4676	(2803)
(2,11,0,0)	1896	3312	4728	6144	480	0	0	18480	(0,0,11,2)
(2,10,1,0)	2784	4728	6672	8616	840	0	0	10560	(0,1,10,2)
(2,10,0,1)	3672	6144	8616	11088	1200	0	0	13560	(1,0,10,2)
(2920)	4064	6672	9280	11888	1456	0	0	14496	(0292)
(2911)	5344	8616	11888	15160	2072	0	0	18432	(1192)
(2902)	7016	11088	15160	13692	2944	0	5540	12224	(2092)
(2830)	5888	9280	12672	16064	2496	0	0	19456	(0382)
(2821)	7712	11888	16064	20240	3536	0	0	24416	(1282)
(2812)	10080	15160	20240	18200	5000	0	7120	16160	(2182)
(2740)	8448	12672	16896	21120	4224	0	0	25344	(0472)
(2731)	11008	16064	21120	26176	5952	0	0	31232	(1372)
(2722)	14304	20240	26176	23392	8368	0	8720	20608	(2272)
(2650)	11968	16896	21504	26112	7040	320	0	30720	(0562)
(2641)	15488	21120	26112	31104	9856	640	0	36096	(1462)
(2632)	19968	26176	31104	27392	13760	1280	8640	23680	(2362)
(2560)	16192	21504	25536	29568	10880	1280	0	33600	(0652)
(2551)	20416	26112	29568	33024	14720	2240	0	36480	(1552)
(2542)	25344	31104	33024	28224	19584	3840	6720	23424	(2452)
(2470)	20256	25536	27936	30336	14976	2880	0	32736	(0742)
(2461)	24320	29568	30336	31104	19072	4480	0	31872	(1642)
(2380)	23056	27936	28096	28256	18176	4720	0	28416	(0832)
(2371)	25856	30336	28256	26176	21376	6560	0	24096	(1732)
(2290)	23840	28096	26172	24248	19584	6180	0	22324	(0922)
(2281)	24624	28256	24248	20240	20992	7640	0	16232	(1822)
(2,1,10,0)	22626	26172	22938	19704	19080	6780	0	16470	(0,10,1,2)
(2191)	21412	24248	19704	15160	18576	7380	0	10616	(1912)
(2,0,11,0)	20089	22938	19167	15396	17240	6620	0	11625	(0,11,0,2)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	x	$(pqrs)$

$(pqrs)$	a_2	b_2	c_2	d_2	κ	λ	μ	ν	
(2,0,10,1)	17552	19704	15396	11088	15400	6460	0	6780	(1,10,0,2)
(1,12,0,0)	3312	5284	7256	9228	1340	0	0	11200	(0,0,12,1)
(1,11,1,0)	4728	7256	9784	12312	2200	0	0	14840	(0,1,11,1)
(1,11,0,1)	6144	9228	12312	15396	3060	0	0	18480	(1,0,11,1)
(1,10,2,0)	6672	9784	12896	16008	3560	0	0	19120	(0,2,10,1)
(1,10,1,1)	8616	12312	16008	19704	4920	0	0	23400	(1,1,10,1)
(1930)	9280	12896	16512	20128	5664	0	0	23744	(0391)
(1921)	11888	16008	20128	24248	7768	0	0	28368	(1291)
(1840)	12672	16512	20352	24192	8832	0	0	28032	(0481)
(1831)	16064	20128	24192	28256	12000	0	0	32320	(1381)
(1750)	16896	20352	23808	27264	13440	0	0	30720	(0571)
(1741)	21120	24192	27264	30336	18048	0	0	33408	(1471)
(1660)	21504	23808	26112	28416	19200	0	0	30720	(0661)
(1651)	26112	27264	28416	29568	24960	0	0	30720	(1561)
(1570)	25536	26112	26688	27264	24960	0	0	27840	(0751)
(1480)	27936	26688	25440	24192	29184	0	0	22944	(0841)
(1390)	28096	25440	22784	20128	30752	0	0	17472	(0931)
(1,2,10,0)	26172	22784	19396	16008	29560	0	0	12620	(0,10,2,1)
(1,1,11,0)	22938	19396	15854	12312	26480	0	0	8770	(0,11,1,1)
(1,0,12,0)	19167	15854	12541	9228	22480	0	0	5915	(0,12,0,1)
(0,13,0,0)	5284	7703	10122	12541	2865	0	0	14960	(0,0,13,0)
(0,12,1,0)	7256	10122	12988	15854	4390	0	0	18714	(0,1,12,0)
(0,11,2,0)	9784	12988	16192	19396	6580	0	0	22600	(0,2,11,0)
(0,10,3,0)	12896	16192	19488	22784	9600	0	0	26080	(0,3,10,0)
(0940)	16512	19488	22464	25440	13536	0	0	28416	(0490)
(0850)	20352	22464	24576	26688	18240	0	0	28800	(0580)
(0760)	23808	24576	25344	26112	23040	0	0	26880	(0670)
	d_2	c_2	b_2	a_2	ν	μ	λ	κ	$(pqrs)$

12. Conclusion.

D'après les résultats que nous venons de déduire, on a toujours

$$\kappa = 0 \text{ pour } p > 4 \text{ et } \kappa \neq 0 \text{ pour } p < 5,$$

$$\lambda = 0 \text{ pour } p < 2 \text{ ou } p + q > 8 \text{ et } \lambda \neq 0 \text{ pour } p > 1 \text{ et } p + q < 9.$$

De même

$$\mu = 0 \text{ pour } s < 2 \text{ ou } r + s > 8 \text{ et } \mu \neq 0 \text{ pour } s > 1 \text{ et } r + s < 9,$$

$$\nu = 0 \text{ pour } s > 4 \text{ et } \nu \neq 0 \text{ pour } s < 5.$$

Et pour les hyperquadriques elles-mêmes tous les nombres ${}_2(pqrs)_{14}$ différent de zéro.

Groningue, Décembre, 1899.

(30 Juni 1900).

Propriétés générales des Images formées par des
rayons centraux traversant
une série de surfaces sphériques centrées

PAR

R. SISSINGH.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N°. 5.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

Augustus 1900.

Propriétés générales des Images formées par des
rayons centraux traversant
une série de surfaces sphériques centrées

PAR

R. SISSINGH.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N^o. 5.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1900.

PRÉFACE.

Le but de l'auteur a été de simplifier la démonstration des propriétés optiques d'un système formé de surfaces sphériques centrées et d'en donner la théorie essentiellement physique. Il ne considère toutefois que des rayons centraux. Cette théorie traite aussi bien des propriétés géométriques que des propriétés physiques des images. Ces dernières propriétés dépendent de la délimitation des faisceaux lumineux par des diaphragmes convenables. La théorie est appliquée au système optique de l'oeil. La seule aberration dont il est question dans cette théorie provient de l'inégale réfrangibilité des rayons de longueur d'onde différente.

Je considère comme un agréable devoir de présenter ici mes sincères remerciements à M. le professeur H. A. LORENTZ, pour le concours qu'il m'a prêté en me signalant plusieurs parties dont l'exposition laissait à désirer.

Amsterdam, Mars 1900.

Propriétés Générales des Images formées
par des rayons centraux
traversant une série de surfaces sphériques centrées.

INTRODUCTION.

§ 1. On dit qu'un espace est reproduit optiquement point pour point par des rayons rectilignes, lorsqu'à chaque faisceau partant d'un point du premier espace correspond un faisceau passant par un point du deuxième. Ces deux points sont appelés conjugués. D'après cette définition il ne correspond à chaque point du premier espace qu'un seul point dans le deuxième; et les points conjugués de tous les points d'une même droite sont eux-mêmes placés sur une même droite dans le second espace. Ces deux droites aussi sont appelées conjuguées. Cette réciprocité de points et de droites est le caractère essentiel de la reproduction optique.

Pour plus de facilité nous parlons de deux espaces dont l'un est la reproduction de l'autre. Bien que les rayons incidents ne soient situés que d'un seul côté du système formant les images, cependant les figures formées par les rayons incidents et leurs prolongements remplissent tout l'espace. La même remarque s'applique aux rayons émergents, situés de l'autre côté du système. Les deux espaces coïncident donc, ce qui ne nous empêche pourtant point de considérer l'un des deux comme objet, et l'autre comme image.

Nous allons commencer par prouver qu'une pareille reproduction optique s'obtient par la réfraction de rayons centraux à travers une série de milieux homogènes, séparés par des surfaces sphériques centrées. Nous entendons par rayons centraux des rayons formant de petits angles avec l'axe reliant tous les centres des surfaces, et peu distants de cet axe pour que l'on puisse confondre les angles soit avec leur sinus, soit avec leur tangente. Les deux espaces objet et image sont ainsi réduits à un mince cylindre autour de l'axe.

Dans un premier chapitre nous traiterons les propriétés géométriques des images, c. à. d. les relations déterminant leur situation et leur grandeur, et la simplification qu'y apporte la considération

de points remarquables. Viennent ensuite une étude du changement que subit la divergence des rayons dans le système optique, et la déduction des propriétés des systèmes télescopiques. Le second chapitre traite des propriétés physiques des images optiques, pour autant qu'elles dépendent de la délimitation des faisceaux lumineux. Nous y verrons comment on détermine le grossissement, l'intensité lumineuse de l'image et la profondeur du champ. Le troisième chapitre s'occupe des constantes optiques de l'oeil et des conditions d'achromatisme des systèmes optiques.

Pour arriver à ces propriétés, nous avons suivi la méthode employée par M. BOSSCHA ¹⁾ pour la détermination de la marche des rayons lumineux dans une série de surfaces sphériques centrées. Chaque rayon est déterminé par les mêmes grandeurs que Lagrange a introduites dans l'étude de la formation des images par un système de lentilles très minces. Aussi les deux équations fondamentales qui contiennent à proprement parler toute la théorie de la formation des images, ont elles la forme que Lagrange ²⁾ leur a données. La méthode de M. Bosscha a ce grand avantage qu'il est facile de donner la signification physique des quatre constantes qui entrent dans les équations; ce qui nous permet d'écourter d'une façon pratique les raisonnements, et de donner une interprétation physique des résultats obtenus. Ce que l'on peut encore considérer comme un avantage de la méthode, c'est qu'elle détermine la situation de l'objet et celle de l'image par leurs distances respectives à la première et à la dernière surface réfringente, et non aux plans principaux et nodaux dont l'emploi est beaucoup moins aisé pour l'observation ³⁾. Aussi la théorie détermine-t-elle le système optique par quatre grandeurs que l'on peut déduire plus directement des observations ⁴⁾. Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que Biot ⁵⁾ dans sa théorie des instruments d'optique s'est déjà servi, pour définir un système optique, des éléments, qu'on va retrouver dans la théorie,

¹⁾ J. BOSSCHA, *Processen-verbaal van de Gewone Vergaderingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, 27 Décembre 1879, voir aussi 27 Avril 1877; *Beiblätter*, IV, 1880, p. 457; *Annales de l'Ecole polytechnique de Delft*, II, 89; 1886.

²⁾ LAGRANGE, *Sur la théorie des lunettes*, *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1788 et 1803. Voir aussi BOSSCHA, *Ann. de l'Ec. Polyt. de Delft*, II, 91.

³⁾ BOSSCHA, *loc. cit.*, 98.

⁴⁾ M. Cornu a donné une forme très précise au procédé le plus simple pour la détermination des éléments principaux d'un système optique (*Journal de physique*, VI, 276 et 308; 1877). Or dans ce procédé on détermine d'une manière directe les quatre grandeurs qui sont introduites dans la méthode indiquée ci-dessus.

⁵⁾ *Traité élémentaire d'Astronomie physique*, Paris, 1844—49.

dont l'exposé va suivre. Ces éléments sont les distances focales principales, définies de la même manière qu'au § 9, le point oculaire et le grossissement angulaire dans l'anneau oculaire. Martin ¹⁾ met en relief quelques avantages pratiques de cette théorie ²⁾.

I. Propriétés géométriques des images formées par des rayons centraux.

§ 2. *Equations fondamentales.* — Afin de trouver dans l'espace de l'image le conjugué d'un point lumineux, il suffit comme nous le démontrerons après (§ 8) de considérer parmi tous les rayons émis par le point lumineux, ceux qui sont situés dans le plan mené par ce point et l'axe optique. Supposons que cet axe soit horizontal et que le plan mené par l'axe soit vertical. Deux grandeurs suffisent pour déterminer un rayon dans ce plan. Pour ces grandeurs nous choisirons l'angle que le rayon forme avec l'axe et la distance à l'axe du point où ce rayon rencontre une des surfaces réfringentes. Pour le rayon incident on considère le point d'intersection avec la première surface, pour le rayon émergent le point d'intersection avec la dernière. Cet angle sera appelé *divergence* et représenté par D ; la distance du point d'intersection à l'axe sera nommée *l'amplitude* du rayon et représentée par A . L'amplitude est positive lorsque le point d'intersection est situé au-dessus de l'axe; la divergence est positive lorsque l'amplitude va en augmentant dans le sens du mouvement lumineux. ³⁾

Considérons d'abord la réfraction par une seule surface sphérique. Distinguons les milieux de part et d'autre de la surface à l'aide des indices 1 et 2, de même que les divergences des rayons incident (1) et réfracté (2). Nous représenterons par A_1 l'amplitude dans la première surface réfringente. Soient donc D_1 et A_1 la divergence et l'amplitude du rayon incident. La divergence d'un rayon de même amplitude mais passant par le centre est $\frac{A_1}{R_1}$, R_1 étant le rayon de courbure. Conformément à la règle des signes

¹⁾ Martin, Ann. de Chim. et de phys., (4), 1X, 440; 1867.

²⁾ Voir à ce sujet Verdet, Conférences de physique, T II, 942.

³⁾ Il n'est pas inutile de faire remarquer que dans la détermination du signe de la divergence l'axe doit être considéré comme une direction, et dans la détermination du signe de l'amplitude comme une droite dont la position par rapport au système optique est déterminée.

pour l'amplitude et la divergence, R sera positif pour une surface tournant sa concavité vers le point lumineux, négatif dans le cas contraire. Nous représenterons par D_{N_1} la divergence du rayon normal de même amplitude que le rayon incident. Pour des rayons centraux la loi de la réfraction peut s'écrire $i = nr$, i et r étant les angles d'incidence et de réfraction. L'angle d'incidence i est égal à $D_{N_1} - D_1$ en valeur absolue; l'angle de réfraction r à $D_{N_1} - D_2$. Si l'on fait attention aux signes des divergences il est facile de voir que l'on a toujours $D_{N_1} - D_1 = n_{1.2} (D_{N_1} - D_2)$.¹⁾

Puisque $D_{N_1} = \frac{A_1}{R_1}$, cette équation peut être mise sous la forme

$$D_2 = \frac{D_1}{n_{1.2}} + \frac{n_{1.2} - 1}{n_{1.2}} \frac{A_1}{R_1}.$$

Supposons maintenant que le rayon émergent soit réfracté une seconde fois par une seconde surface dont le sommet soit à la distance d_1 du sommet de la première. Donnons aux milieux séparés par cette surface les indices 2 et 3, nous aurons, en désignant par A_2 l'amplitude dans la seconde surface réfringente

$$D_3 = \frac{D_2}{n_{2.3}} + \frac{n_{2.3} - 1}{n_{2.3}} \frac{A_2}{R_2}, \quad A_2 = A_1 + d_1 D_2.$$

On voit que si l'on a une série de surfaces réfringentes, il existe une relation linéaire entre chaque divergence, ou chaque amplitude, et celles qui précèdent. La divergence et l'amplitude finales D_r et A_r du rayon réfracté se déduisent donc de la divergence D_1 et de l'amplitude A_1 du rayon incident par une série de transformations linéaires. Toutes les relations dont il est fait usage étant homogènes par rapport aux amplitudes et divergences, il n'y aura pas de termes indépendants de ces grandeurs. Les relations entre D_r et A_r d'une part, D_1 et A_1 d'autre part, étant donc linéaires et homogènes, on peut écrire

$$D_r = cD_1 + pA_1, \quad A_r = rD_1 + sA_1. \quad (\text{I})$$

§ 3. *Signification des constantes optiques* ²⁾. On arrive à la signification des quatre constantes optiques c , p , r et s des équations fondamentales (I), en posant successivement D_1 et A_1 égaux à zéro. On considère ainsi soit des rayons incidents parallèles à l'axe, soit

¹⁾ On reconnaît aisément que cette équation est applicable à tout rayon incident aussi bien pour une surface convexe que pour une surface concave si $n_{1.2} \leq 1$.

²⁾ Voir BOSSCHA, Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft, II, 90, 91.

des rayons incidents passant par le point d'intersection de la première surface réfringente avec l'axe. Ce point d'intersection est le sommet de la première surface réfringente.

Considérons d'abord un rayon incident passant par le sommet de la première surface réfringente; $A_1 = 0$. Le rayon émergent coupe l'axe au point conjugué de ce sommet. A ce point conjugué nous donnerons plus tard le nom de deuxième *point oculaire* (§ 9). Posant $A_1 = 0$, nous obtenons pour la première équation fondamentale $c = \frac{D_r}{D_1}$. Ce rapport des divergences de deux rayons con-

jugués est appelé grossissement angulaire. Nous verrons plus tard (§ 10) que ce rapport est le même pour toutes les paires de rayons passant par un système de deux points conjugués, ainsi que pour toutes les images situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe. Le plan normal à l'axe mené par le deuxième point oculaire, s'appelle deuxième plan oculaire. La constante est donc le grossissement angulaire dans le deuxième plan oculaire (§ 9).

Si le rayon incident est parallèle à l'axe, $D_1 = 0$. La première équation fondamentale devient alors $p = \frac{D_r}{A_1}$. Dans ce cas D_r est proportionnel à A_1 . Comme D_r donne le changement de direction que subit par réfraction un rayon incident parallèle à l'axe, p est la déviation d'un rayon lumineux incident parallèle à l'axe avec une amplitude égale à l'unité. C'est cette déviation qu'on appelle le pouvoir principal ¹⁾ ou pouvoir focal du système. Ce pouvoir doit être pris positivement si le rayon qui émerge du système converge vers l'axe. Le pouvoir principal doit donc être représenté par $-p$.

Pour les systèmes optiques où $A_1 = A_r$, comme une surface réfringente unique ou une lentille infiniment mince, l'expression $\frac{1}{p} = \frac{A_1}{D_r}$ donne la distance à laquelle le rayon émergent va couper l'axe en avant la dernière surface réfringente. Ce point d'intersection est le deuxième foyer principal du système (§ 9). Lorsque A_1 et D_r sont positifs tous les deux, ce point d'intersection est situé en avant de la dernière surface réfringente. Mais comme plus tard nous conviendrons de considérer comme négatives des distances

¹⁾ Voir Ad. Martin, Méthode directe pour la détermination des courbures des objectifs de photographie, Extrait du Bulletin de la Société française de Photographie, 2^e Serie, IX, 1893.

prises en avant de cette surface, la deuxième distance focale principale sera représentée par $-\frac{1}{p}$ pour un système optique où $A_1 = A_r$.

Revenons maintenant au rayon incident parallèle à l'axe, donc au cas où $D_1 = 0$; la deuxième équation fondamentale devient $s = \frac{A_r}{A_1}$. Or supposons qu'un faisceau cylindrique de rayons parallèles à l'axe tombe sur la première surface réfringente, et soit A_1 le rayon du cercle ainsi éclairé sur cette surface; A_r est alors le rayon du cercle éclairé sur la dernière surface réfringente. La constante s est donc ce que l'on pourrait appeler le pouvoir dilatant du système.

Quant à la constante r , nous la définirons d'une façon un peu différente de celle dont M. BOSSCHA l'a définie. Considérons un rayon incident passant par le sommet de la première surface, de sorte que $A_1 = 0$. La deuxième équation fondamentale devient $\frac{1}{r} = \frac{D_1}{A_r}$. Si l'on suit le rayon incident dans son parcours

à travers le système optique, on remarque que D_1 est l'angle sous lequel on observe une dimension A_r , placée dans la dernière surface réfringente, quand l'oeil est situé au sommet de la première. Et comme pour $A_1 = 0$, A_r est proportionnel à D_1 on voit que $\frac{1}{r}$ est

l'angle sous lequel l'unité de longueur placée dans la dernière surface réfringente est observée par un oeil placé au sommet de la première. Nous donnerons plus tard le nom de puissance ¹⁾ du système à l'angle sous lequel on voit l'unité de longueur de

l'objet. La constante $\frac{1}{r}$ est donc la puissance dans les conditions considérées, *c. à d.* au sommet de la première surface, pour un objet placé dans la dernière surface réfringente.

§ 4. *Combinaison de deux systèmes.* ²⁾ Soient c_1, p_1, r_1, s_1 et c_2, p_2, r_2, s_2 les constantes des deux systèmes, et d la distance de la dernière surface réfringente du premier système à la première surface du deuxième. L'amplitude et la divergence d'un rayon émergent du premier système sont respectivement $c_1 D_1 + p_1 A_1$ et $r_1 D_1 + s_1 A_1$. Le même rayon, considéré comme incident par rap-

¹⁾ Voir Verdet, Conférences de physique, II, 945, 946.

²⁾ BOSSCHA, *loc. cit.*, 95.

port au deuxième système a pour divergence $c_1 D_1 + p_1 A_1$ et pour amplitude $(r_1 D_1 + s_1 A_1) + d(c_1 D_1 + p_1 A_1)$. A l'aide des constantes optiques c_2, p_2, r_2, s_2 du deuxième système, nous pouvons calculer la divergence et l'amplitude du rayon sortant du deuxième système, en fonction de la divergence D_1 et de l'amplitude A_1 du rayon tombant sur le premier système. Ce calcul nous apprend que les constantes c, p, r et s du système résultant de la combinaison, sont données par les relations:

$$\begin{aligned} c &= c_1 (c_2 + p_2 d) + r_1 p_2, & r &= c_1 (r_2 + s_2 d) + r_1 s_2 \\ p &= p_1 (c_2 + p_2 d) + s_1 p_2, & s &= p_1 (r_2 + s_2 d) + s_1 s_2 \end{aligned} \quad (\text{II})$$

§ 5. *Renversement du système* ¹⁾. Si l'on suit les rayons dans leur parcours à travers le système à constantes c, p, r, s , en allant du dernier milieu vers le premier, de telle sorte que le rayon émergent devienne rayon incident et réciproquement, l'ordre de succession des surfaces est renversé, et l'on obtient un système que l'on peut appeler l'inverse du premier. Dans ce système inverse la divergence du rayon incident est $-D_r$ et son amplitude A_r ; la divergence et l'amplitude du rayon sortant sont respectivement $-D_1$ et A_1 . Si donc, dans les équations fondamentales du système initial nous remplaçons D_1 par $-D_r$, D_r par $-D_1$, A_1 par A_r et A_r par A_1 , nous obtenons les relations entre les divergences et amplitudes du rayon incident et sortant pour le système inverse. Ces relations sont: $-D_1 = -c D_r + p A_r$, et $A_1 = -r D_r + s A_r$. Tirant de là les valeurs de D_r et A_r en fonction de D_1 et A_1 , nous obtenons les équations fondamentales du système inverse:

$$(cs - pr) D_r = s D_1 + p A_1, \quad (cs - pr) A_r = r D_1 + c A_1.$$

Si nous représentons par c', p', r', s' les constantes optiques du système inverse, ces équations nous donnent:

$$c' = \frac{s}{N}, \quad p' = \frac{p}{N}, \quad r' = \frac{r}{N} \text{ et } s' = \frac{c}{N} \quad (\text{III})$$

où $N = cs - pr$.

§ 6. *Constantes optiques d'une surface réfringente unique et d'une lentille infiniment mince.* Si le système optique ne se compose que d'une seule surface réfringente, les valeurs des constantes optiques se déduisent immédiatement de leur signification. Comme dans ce cas le sommet de la surface réfringente coïncide avec son

¹⁾ BOSSCHA, *loc. cit.*, 93.

image, c n'est autre chose que le grossissement angulaire en ce point, soit le rapport entre les angles de réfraction et d'incidence. Si nous distinguons par les indices 1 et 2 les deux milieux séparés par la surface réfringente, le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction est représenté par $n_{1.2}$. Et comme pour des rayons centraux le rapport des sinus peut être remplacé par celui des angles, on a $c = \frac{1}{n_{1.2}}$.

La constante $-p$, le pouvoir principal ou focal, est égale à l'inverse de la distance focale (voir § 3). Soit R le rayon de courbure de la surface réfringente; ainsi que nous l'avons fait remarquer au § 2, la valeur de R doit être prise négativement pour une surface tournant sa convexité vers la lumière; on a donc $p = \frac{n_{1.2} - 1}{n_{1.2}} \frac{1}{R}$.

Cette valeur peut encore être déduite immédiatement de la forme, que prend la première équation fondamentale quand on l'applique à une surface réfringente unique (§ 2). Dans le cas d'une surface convexe p est négatif pour $n_{1.2} > 1$.

On reconnaît immédiatement que le pouvoir dilatant $s = 1$. Quant à la puissance $\frac{1}{r}$ au sommet de la surface réfringente, pour un objet placé dans cette surface, elle est infiniment grande, soit $r = 0$ ¹⁾.

Pour une lentille infiniment mince la constante c est le produit des grossissements angulaires dans les deux réfractions, de sorte que $c = \frac{1}{n_{1.2}} \cdot \frac{1}{n_{2.1}} = 1$; $p = -\frac{1}{F}$, F étant la distance focale principale de la lentille; $r = 0$ et $s = 1$. Si la lentille est convergente p est négatif, il est positif, si la lentille est divergente. Pour une lentille infiniment mince, les équations fondamentales sont donc:

$$D_r = D_1 - \frac{A_1}{F}, \quad A_r = A_1 \text{ } ^2).$$

§ 7. *Relation générale entre les constantes optiques d'un système.* Soit un système optique à constantes c , p , r , s , formé par la combinaison de deux systèmes à constantes c_1 , p_1 , r_1 , s_1 , et c_2 , p_2 , r_2 , s_2 , dont les surfaces terminales opposées sont à une distance d l'une de l'autre; d'après les équations (II) (§ 4), on a

$$c s - p r = (c_1 s_1 - p_1 r_1) (c_2 s_2 - p_2 r_2).$$

¹⁾ voir BOSSCHA, loc. cit., 93, 94.

²⁾ ibid., 94.

S'il n'y a qu'une seule surface réfringente les valeurs trouvées au § 6 pour les constantes optiques nous donnent: $c_1 s_1 - p_1 r_1 = \frac{1}{n_{1.2}}$. Pour une seconde surface réfringente séparée par des milieux à indices 2 et 3, $c_2 s_2 - p_2 r_2 = \frac{1}{n_{2.3}}$. Pour un système formé de $a-1$ surfaces réfringentes, nous aurons donc

$$cs - pr = (c_1 s_1 - p_1 r_1)(c_2 s_2 - p_2 r_2) \dots (c_a s_a - p_a r_a) \\ = \frac{1}{n_{1.2}} \cdot \frac{1}{n_{2.3}} \dots \frac{1}{n_{a-1.a}} = n_{a.1}^{-1} \quad (IV)$$

Si les milieux extrêmes sont les mêmes, on a $cs - pr = 1$. Dans ce cas il n'y a donc que trois constantes optiques indépendantes.

§ 8. *Relations entre les situations d'un point lumineux et de son image. Grossissement linéaire.*²⁾ Les situations de l'objet et de l'image sont déterminées par leurs distances x aux surfaces terminales, et leurs distances y à l'axe. Pour l'objet ces distances seront représentées par x_1, y_1 et pour l'image par x_2, y_2 . Les distances x_1 et x_2 sont positives si les points correspondants sont réels, c. à. d. si l'objet est placé en avant de la première, l'image en arrière de la dernière surface réfringente. Le signe de la distance y est déterminé de la même façon que celui de l'amplitude.

Considérons un point lumineux x_1, y_1 . Pour chaque rayon incident il existe entre l'amplitude et la divergence initiales la relation linéaire $A_1 = y_1 + x_1 D_1$. Et comme, d'après les équations fondamentales, D_r et A_r sont des fonctions linéaires de D_1 et A_1 , il doit exister une relation linéaire $A_r = h + k D_r$ entre l'amplitude finale A_r et la divergence finale D_r . Cette relation linéaire signifie que tous les rayons émergents conjugués des rayons incidents, émis par le point x_1, y_1 , passent par le point $x_2 = -k, y_2 = h$, si l'on tient compte de la façon, dont le signe de x_2 a été déterminé. Ce point est l'image du premier. Or, si $A_1 = y_1 + x_1 D_1$, les équations fondamentales nous donnent $D_r = py_1 + (c + px_1) D_1$, $A_r = sy_1 + (r + sx_1) D_1$, d'où il suit que

$$A_r = sy_1 + \frac{r + sx_1}{c + px_1} p y_1 + \frac{r + sx_1}{c + px_1} D_r = \frac{n_{a.1}}{c + px_1} y_1 + \frac{r + sx_1}{c + px_1} D_r$$

¹⁾ voir BOSSCHA, loc. cit., 94.

²⁾ ibid., 95.

On trouve ainsi pour coordonnées de l'image :

$$x_2 = -\frac{r + sx_1}{c + px_1}, \quad y_2 = \frac{n_{a.T}}{c + px_1} y_1. \quad (V)$$

On voit que x_2 ne dépend que de x_1 ; cela veut dire que les images de tous les points lumineux situés dans un même plan normal à l'axe, sont elles mêmes situées dans un même plan normal. C'est là toutefois une conséquence de notre hypothèse de rayons centraux, c. à. d. de faisceaux lumineux limités à un mince cylindre autour de l'axe.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les rayons qui se trouvent dans un même plan passant par l'axe. Si le point lumineux est situé sur l'axe, tous les rayons émanant de ce point, rencontrent après la réfraction l'axe dans le même point à cause de la symétrie autour de l'axe. Les rayons qui ne sont pas situés dans un plan passant par l'axe peuvent être considérés comme des rayons émanant de points lumineux situés à côté de l'axe. Il est évident que l'image d'un tel point lumineux se trouve sur l'axe secondaire, mené par le point lumineux et le centre de courbure de la surface réfringente, s'il n'y a qu'une seule surface réfringente. Cela résulte immédiatement de la symétrie autour de cet axe. Les relations qui lient les positions du point lumineux et de son image sur cet axe secondaire sont les mêmes que dans le premier cas. Seulement il faut remplacer les plans menés par l'axe principal par d'autres menés par l'axe secondaire et mesurer les distances à la surface réfringente le long de cet axe. On en déduit immédiatement que tous les points lumineux situés sur une sphère concentrique avec la surface réfringente donnent des images qui se trouvent sur une autre sphère, dont le centre coïncide aussi avec celui de la surface réfringente. On peut dire que tout faisceau conique se transforme après la réfraction par une seule surface réfringente en un autre faisceau conique et il en est de même s'il y a une série de surfaces réfringentes. Cette proposition, une fois démontrée, nous autorise à employer des constructions planes sans tenir compte des rayons situés hors de ce plan.

La valeur de y_2 nous apprend que si $y_1 = 0$, on a aussi $y_2 = 0$, c. à. d. que tout point lumineux situé sur l'axe a son image sur cet axe. L'expression $\frac{y_2}{y_1}$ apprend dans quel rapport une dimension perpendiculaire à l'axe est agrandie par la reproduction optique. Ce rapport est appelé grossissement linéaire et représenté par V ;

on a donc, d'après les relations (V), $V = \frac{n_{a,1}}{c + px_1}$, ou bien encore

$$V = s + px_2. \quad (\text{VI}')$$

Le grossissement linéaire ne dépend que de x_1 , de sorte que les distances à l'axe de tous les points situés dans un même plan normal à l'axe sont agrandies dans le même rapport. Et si l'on tient compte de ce que l'angle de deux droites situées dans un même plan normal n'est pas modifié par la reproduction optique, on voit que l'image d'une figure située dans un plan normal à l'axe est une figure semblable. Le rapport dans lequel les dimensions sont augmentées, c. à. d. le grossissement linéaire, est ainsi défini de la façon la plus générale possible. C'est le grossissement linéaire dans un plan perpendiculaire à l'axe. Ce grossissement ne peut devenir infiniment grand, que dans le cas où l'image est placée à une distance infiniment grande.

§ 9. *Points remarquables. Anneaux oculaires.* Les deux foyers principaux sont conjugués de deux points situés à l'infini. Le premier foyer principal est conjugué d'un point situé à distance infinie en arrière du système optique, le second d'un point à distance infinie en avant du système. Les distances de ces deux foyers respectivement à la première et à la dernière surface réfringente sont les distances focales principales, que nous représenterons par f_1 et f_2 . Leurs valeurs sont données immédiatement par les équations (V)

(§ 8), qui donnent $f_1 = -\frac{c}{p}$, $f_2 = -\frac{s}{p}$.

Les valeurs de f_1 et f_2 peuvent aussi être déduites de la signification des constantes optiques. D'après la signification des constantes optiques un rayon incident parallèle à l'axe, et dont l'amplitude est égale à 1, aura pour amplitude finale $A_r = s$, et pour divergence finale $D_r = p$; le rayon émergent coupe donc l'axe à une distance $-\frac{A_r}{D_r} = -\frac{s}{p}$ de la dernière surface réfringente. De la même

façon on prouve que $f_1 = +\frac{A_1}{D_1}$ pour $D_r = 0$. Si la divergence finale $D_r = 0$, il résulte de la première équation fondamentale $\frac{A_1}{D_1} = -\frac{c}{p}$, de sorte que $f_1 = -\frac{c}{p}$. D'ailleurs les valeurs de f_1 et f_2 peuvent être transformées l'une dans l'autre au moyen des relations (III) (§ 5) entre les constantes optiques d'un système et celles du système inverse.

On donne le nom de points oculaires aux points conjugués des

sommets des surfaces réfringentes terminales. Un point lumineux placé au premier point oculaire a son image au sommet de la dernière surface réfringente; au deuxième point oculaire se forme l'image d'un point lumineux placé au sommet de la première surface. Si nous représentons par o_1 la distance du premier point oculaire à la première surface réfringente, et par o_2 la distance du deuxième point oculaire à la dernière surface, nous pouvons écrire

$$o_1 = + \frac{A_1}{D_1}, \text{ pour } A_r = 0, \text{ donc d'après la deuxième équation fondamentale } o_1 = - \frac{r}{s},$$

$$o_2 = - \frac{A_r}{D_r}, \text{ pour } A_1 = 0, \text{ donc d'après les équations fondamentales } o_2 = - \frac{r}{c}.$$

Ces deux valeurs peuvent être transformées l'une dans l'autre au moyen des relations (III) (§ 5).

On peut aussi déterminer la situation de deux points conjugués par leurs distances ξ_1 et ξ_2 aux foyers principaux; $\xi_1 = x_1 + \frac{c}{p}$, $\xi_2 = x_2 + \frac{s}{p}$, et les relations (V) et (VI) (§ 8) déterminant la position de l'image et le grossissement linéaire deviennent

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{n_{a,1}}{p^2} \quad (\text{VII}), \quad V = p \xi_2 = \frac{n_{a,1}}{p \xi_1} \quad (\text{VIII})^1$$

Nous voyons par ces relations que ξ_1 et ξ_2 sont toujours affectés du même signe. L'objet et l'image sont donc toujours placés de côtés différents des foyers principaux. Le grossissement est positif, c. à. d. que l'image est droite, si les distances ξ_1 et ξ_2 ont le même signe que p ; dans le cas contraire le grossissement est négatif et l'image est renversée. Le signe de p est déterminé par la règle suivante: on considère des rayons incidents parallèles à l'axe; si après réfraction le faisceau diverge, p est positif, et si le faisceau converge p est négatif (§ 3).

Nous pouvons aussi déterminer les situations que doivent occuper un objet et son image pour que le grossissement aît une valeur donnée. Car, si V est le grossissement donné, on a d'après les relations (VIII), $\xi_2 = \frac{V}{p}$, $\xi_1 = \frac{n_{a,1}}{Vp}$, de sorte que

¹⁾ voir BOSSCHA, loc. cit., 98, 99

$$x_1 = f_1 + \xi_1 = \frac{1}{p} \left(-c + \frac{V}{n_{a,1}} \right),$$

$$x_2 = f_2 + \xi_2 = \frac{1}{p} (-s + V).$$

Il est facile d'attribuer une signification au second membre de l'équation (VII): — p est le pouvoir principal du système, — $\frac{p}{n_{a,1}}$ le pouvoir principal du système inverse (§§ 3 et 5), de sorte que $\xi_1 \xi_2$ est égal au produit des valeurs inverses des pouvoirs principaux des deux systèmes direct et inverse ¹⁾.

Des valeurs trouvées pour les distances focales principales f_1 et f_2 et pour les distances o_1 et o_2 des points oculaires, il suit que $\frac{f_1}{f_2} = \frac{o_1}{o_2} = \frac{c}{s}$. Des quatre points remarquables: foyers principaux et points oculaires, trois seulement sont indépendants des autres; ces quatre points ne suffisent donc pas à déterminer les propriétés d'un système dont on donne les surfaces réfringentes extrêmes. On a donc encore besoin d'un quatrième élément, par exemple $n_{a,1}$, ou bien le grossissement dans un plan déterminé de l'espace image. ²⁾

Les plans normaux à l'axe, contenant le premier et le deuxième point oculaire, sont appelés respectivement premier et deuxième plan oculaire. Ils sont respectivement conjugués du dernier et du premier plan réfringent du système. Les cercles conjugués des bords des surfaces réfringentes extrêmes sont appelés anneaux oculaires; le premier anneau oculaire correspondant au bord de la dernière surface. Il va de soi que ces anneaux sont contenus dans les plans correspondants. Si le faisceau de rayons lumineux traversant le système optique est limité latéralement par les bords des surfaces réfringentes terminales, le faisceau incident forme un cône dont le sommet est au point lumineux et qui a pour directrice le bord de la première surface réfringente. Le faisceau émergent aussi est un cône; son sommet est l'image du point lumineux, et sa directrice le deuxième anneau oculaire. De même le premier anneau oculaire est la directrice du cône de rayons incidents, qui sont réfractés suivant un cône dont le sommet est l'image du point lumineux, et la directrice le bord de la dernière surface réfringente.

§ 10. *Grossissements angulaire et axial.* Le grossissement angulaire V_a est le rapport dans lequel l'angle, formé par deux droites situées dans un même plan passant par l'axe, est augmenté par la

¹⁾ Voir BOSSCHA, loc. cit., 99.

²⁾ Voir BOUTY, Nombre des éléments nécessaires pour déterminer l'effet extérieur d'un système optique, Journal de physique, VIII, 331, 1878.

Verh. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie). DL. VII.

réfraction. Considérons deux rayons incidents, dont les divergences sont D_1 et D_1' , émis par un point lumineux x_1, y_1 . Les amplitudes initiales sont $A_1 = y_1 + x_1 D_1$ et $A_1' = y_1 + x_1 D_1'$. D'après la première équation fondamentale on a

$$D_r' - D_r = c(D_1' - D_1) + p(A_1' - A_1) = (c + px_1)(D_1' - D_1).$$

Le grossissement angulaire est donc

$$V_a = c + px_1; \quad (\text{IX})$$

ou bien, exprimant x_1 en fonction de la distance de l'image à la dernière surface réfringente,

$$V_a = \frac{n_{a,1}}{s + px_2}$$

On peut encore exprimer le grossissement angulaire en fonction des distances de l'objet et de l'image aux foyers principaux :

$$V_a = p\xi_1 = \frac{n_{a,1}}{p\xi_2}.$$

Supposons que le point lumineux soit situé sur l'axe, et que l'axe soit lui-même un des rayons incidents, alors on a pour grossissement angulaire $V_a = \frac{D_r}{D_1}$. La valeur de cette expression peut être immédiatement déduite de la première équation fondamentale et l'on arrive ainsi à l'équation (IX).

Entre les grossissements linéaire et angulaire existe la relation $V_a = \frac{n_{a,1}}{V_r}$. Si les milieux extrêmes sont identiques, le produit de ces deux grossissements est égal à 1.

Le grossissement angulaire est indépendant de la divergence des rayons incidents; il est donc le même pour toute paire de rayons du faisceau émis par le point lumineux. Il ne dépend que de la distance x_1 , et est donc, tout comme le grossissement linéaire, le même pour tous les points lumineux situés dans un même plan normal à l'axe.

Le grossissement angulaire devient infiniment grand si $x_1 = \infty$, c. à. d. si le point lumineux est placé à l'infini. Dans ce cas $D_1 = 0$, tandis que D_r a une valeur finie. Dans les systèmes optiques, traités au § 12, on a pour $x_1 = \infty$, ou $D_1 = 0$; $D_r = 0$ et V_a a une valeur finie.

Outre les grossissements linéaire et angulaire nous considérons aussi le grossissement axial, donnant le rapport dans lequel les dimensions parallèles à l'axe sont augmentées par la reproduc-

tion optique. Soient x_1, y_1 et x'_1, y'_1 deux points lumineux et x_2, y_2 , x'_2, y'_2 les images correspondantes. Le grossissement axial est $V_{ax} = \frac{x'_2 - x_2}{x'_1 - x_1}$. Si l'on remplace x_2 et x'_2 par leurs valeurs en fonction de x_1 et x'_1 (V) on obtient:

$$V_{ax} = - \frac{n_{a,1}}{(c + p x_1)(c + p x'_1)} \text{ ou bien, nous rappelant l'équation (IX), } V_{ax} = - \frac{V V'}{n_{a,1}} \dots \dots (X).$$

V représente ici le grossissement dans le plan de l'image x_2 , c.à.d. un plan mené par cette image normalement à l'axe. V' est le grossissement dans le plan x'_2 . Si les deux paires de points conjugués sont très rapprochées l'une de l'autre, on a $V = V'$ et $V_{ax} = - \frac{V^2}{n_{a,1}}$. La valeur négative de V_{ax} montre qu'à tout déplacement du point lumineux correspond un déplacement de l'image dans le même sens. ¹⁾

Les grandeurs qui entrent dans l'expression $V_{ax} = \frac{x'_2 - x_2}{x'_1 - x_1}$ du grossissement axial, peuvent être immédiatement reliées au grossissements linéaire et angulaire de la façon suivante. Considérons un point lumineux x_1, y_1 , placé donc dans le plan x_1 normal à l'axe, et soit x_2, y_2 son image. Parmi tous les rayons émis par le point x_1, y_1 , considérons celui qui coupe l'axe à une distance x'_1 de la première surface réfringente. Le rayon conjugué sortant passe par le point x_2, y_2 , et coupe l'axe à une distance x'_2 de la dernière surface réfringente. Si D_1 et D_r sont les divergences de ces rayons, on a $x'_1 - x_1 = \frac{y_1}{D_1}$, $x'_2 - x_2 = - \frac{y_2}{D_r}$. ²⁾ On a

donc $V_{ax} = - \frac{y_2}{y_1} \frac{D_1}{D_r}$. Or, $\frac{y_2}{y_1}$ est le grossissement linéaire V dans

le plan x_2 , $\frac{D_r}{D_1}$ le grossissement angulaire V'_a dans le plan x'_2 . Et

si l'on exprime le grossissement angulaire V'_a en fonction du grossissement linéaire V' dans le plan x'_2 , on obtient de nouveau

$$V_{ax} = - \frac{V V'}{n_{a,1}}.$$

¹⁾ voir BOSSCHA, loc. cit., 96.

²⁾ $x'_1 - x_1$ et $x'_2 - x_2$ ont des signes différents parce que le point lumineux et son image se déplacent dans le même sens.

La relation $V_a = \frac{n_{a,1}}{V}$ entre les grossissements linéaire et angulaire peut être mise sous une autre forme. Comme $V = \frac{y_2}{y_1}$, c. à. d. égal au rapport des distances de l'image et du point lumineux à l'axe, $V_a = \frac{D_r}{D_1}$, et $n_{a,1} = \frac{n_1}{n_a}$, la relation entre les deux grossissements peut encore s'écrire $D_1 n_1 y_1 = D_r n_a y_2$. (XI)

Mise sous cette forme, elle est l'expression du théorème de LAGRANGE-HELMHOLTZ. LAGRANGE ¹⁾ l'a démontré dans le cas d'une surface réfringente unique et pour des lentilles infiniment minces; HELMHOLTZ ²⁾ l'a étendu à un système de surfaces réfringentes.

Prenons un rayon incident dirigé vers un point du bord de la première surface réfringente; D_1 est la demi-ouverture du cône de rayons incidents. N'oublions pas toutefois que les images sont toujours formées par des rayons centraux, et que le point lumineux est donc toujours situé dans le voisinage immédiat de l'axe. D_r est la demi-ouverture du cône émergent. De la relation (XI) il résulte que, pour $n_1 = n_a$, l'ouverture du cône de rayons diminue par réfraction dans un rapport exprimé par le grossissement linéaire. Cette proposition trouve une application étendue dans la théorie des instruments d'optique.

Faisons remarquer ici que la valeur que nous venons de trouver pour le grossissement axial, nous donne la démonstration immédiate d'une propriété générale des systèmes optiques, communiquée en 1669 par Christiaan Huygens au secrétaire Oldenburg de la Royal Society, et publiée plus tard dans ses *Dioptrica* sous la forme de *Propositio XL* ³⁾. Cette proposition est la suivante; si l'on intervertit les positions de l'objet et de l'oeil, tandis que le système de lentilles interposées, quelque nombreuses qu'elles soient, n'est pas modifié, dans les deux cas l'image est vue sous le même angle et dans la même position, c'est-à-dire droite ou renversée.

Soient x_1 la distance de l'objet à la première surface réfringente, et x_2 la distance de l'image à la dernière, x'_2 la distance de l'oeil à la dernière et x'_1 la distance à laquelle le système optique forme une image de l'oeil en avant de la première surface réfringente. Donnons

¹⁾ LAGRANGE, Sur une loi générale d'optique, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1803.

²⁾ HELMHOLTZ, Physiologische Optik, 1^{ste} Aufl., 1866, 58; 2^e Aufl., 1896, 71.

³⁾ Voir BOSSCHA; Christiaan Huygens, Rede am 200^{sten} Gedächtnisstages seines Lebensendes, übersetzt von Th. W. Engelmann, 50 et 52—55; Huygens, Oeuvres complètes, Tome VI.

à l'objet l'unité de longueur et représentons par V et V' les grossissements linéaires dans les plans x_2 et x'_2 . L'objet est placé dans le plan x_1 , l'image se forme dans le plan x_2 et a pour dimension

V ; de l'oeil placé en x'_2 elle est vue sous un angle $\frac{V}{x'_2 - x_2}$,

puisque l'image est formée par des rayons centraux, de sorte que tous les angles formés avec l'axe sont très petits. Si l'objet est placé en x'_2 , l'image se forme en x'_1 , et alors elle a pour dimension $\frac{1}{V'}$, de sorte que l'oeil la voit alors sous l'angle $\frac{1}{V'} \frac{1}{x_1 - x'_1}$. D'après

le théorème de Huygens $\frac{V}{x'_2 - x_2} = \frac{1}{V'} \frac{1}{x_1 - x'_1}$, et cette équation

est identique avec cette autre $V_{ax} = \frac{x'_2 - x_2}{x'_1 - x_1} = - \frac{V V'}{n_{a,1}}$,

dans le cas où $n_{a,1} = 1$, c. à. d. où les milieux extrêmes sont identiques. On voit en outre de quelle façon on peut donner une extension au théorème de Huygens dans le cas où les milieux extrêmes sont différents.

§ 11. *Construction de l'image.* Nous avons vu (§ 9) que les quatre points remarquables déterminent avec une autre grandeur encore les propriétés optiques du système. Prenons pour cette autre grandeur le grossissement linéaire V_{c_2} dans le deuxième plan oculaire. Ce grossissement est étroitement lié à la constante op-

tique c du système. On a en effet $V_{c_2} = \frac{n_{a,1}}{c}$, ainsi qu'on le

déduit immédiatement de la définition de c (§ 3), et de la relation entre les grossissements angulaire et linéaire (§ 10). À l'aide de ces données il est possible de construire pour trois rayons incidents les rayons émergents du système, et trouver l'image du point lumineux par la combinaison de deux de ces rayons. Ces trois rayons incidents sont:

- 1° le rayon parallèle à l'axe,
- 2° le rayon passant par le premier foyer principal,
- 3° le rayon passant par le premier point oculaire.

Les trois rayons conjugués passent successivement par le deuxième foyer principal, par un point à l'infini, et par le sommet de la dernière surface réfringente. On connaît d'ailleurs les points où ils coupent le deuxième plan oculaire. Si l'on représente par A l'amplitude du rayon incident, la distance à l'axe du point d'intersection du rayon émergent avec le deuxième plan oculaire est $A V_{o,2}$. La construction devient beaucoup plus simple, si au

lieu de considérer la première surface réfringente et le deuxième plan oculaire, on choisit deux plans conjugués tels que le grossissement soit égal à 1. Ce sont les plans principaux, auxquels Gauss a été conduit par d'autres considérations. Comme dans le deuxième plan principal le grossissement angulaire est égal à 1, si du moins les milieux extrêmes sont identiques, il est avantageux de remplacer le troisième rayon auxiliaire par un rayon passant par le premier point principal, c. à. d. le point d'intersection du premier plan principal avec l'axe. Le rayon émerge alors dans la même direction en passant par le deuxième point principal. En dehors de cette simplification de la construction, l'introduction des plans principaux est sans avantage marqué pour la résolution des problèmes de dioptrique, ou bien ces plans n'ont aucune signification dans ces problèmes ¹⁾.

Les plans principaux ne se prêtent pas aussi facilement à une détermination expérimentale que les plans oculaires, et encore n'y arrive-t-on que par voie indirecte; nous ne les introduirons donc pas dans nos raisonnements.

§ 12. *Constantes optiques d'une lentille et de la combinaison de deux lentilles.* Pour une seule surface réfringente nous avons,

d'après § 6, $c_1 = \frac{1}{n_{1,2}}$, $p_1 = \frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}} \frac{1}{R_1}$, $r_1 = 0$, $s_1 = 1$. R est

négatif si la surface tourne sa convexité vers la lumière. Pour une deuxième surface, formant avec la première une lentille

d'épaisseur d , on a $c_2 = \frac{1}{n_{2,1}}$, $p_2 = - (n_{1,2} - 1) \frac{1}{R_2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$.

Appliquant maintenant les relations (II) à la combinaison des deux systèmes optiques, nous trouvons pour constantes optiques de la lentille,

$$c = 1 - \frac{n - 1}{n} \frac{d}{R_2}, p = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{(n - 1)^2}{n} \frac{d}{R_1 R_2},$$

$$r = \frac{d}{n}, s = 1 + \frac{n - 1}{n} \frac{d}{R_1}. \text{ Pour une lentille biconvexe } R_1 \text{ est}$$

¹⁾ Les rayons menés du point lumineux et de son image vers les points principaux, ne sont point les axes de symétrie des faisceaux incident et émergent, et ne peuvent donc servir, en les remplaçant, à représenter la marche du faisceau qui forme l'image. Les points principaux sont aussi sans importance quand il s'agit de déterminer l'intensité lumineuse en divers points de l'image, ou l'éclairement de l'espace image. De même, les plans principaux sont sans aucune utilité quand il s'agit de déterminer la finesse avec laquelle diverses parties de l'espace objet sont reproduites dans un plan déterminé de l'image, ou bien quand on veut déterminer le point d'où il faut regarder l'image, afin que l'effet de perspective soit le même que celui produit par l'objet, toutes questions que nous allons traiter dans la suite.

négatif, R_2 est positif; pour une lentille biconcave R_1 est positif, R_2 négatif.

Nous déduisons de là les distances focales principales et les distances des points oculaires:

$$F_1 = -\frac{c}{p} = -\frac{1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2}}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{R_1 R_2}}, F_2 = -\frac{s}{p} =$$

$$-\frac{1 + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1}}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{R_1 R_2}}, o_1 = -\frac{r}{s} = -\frac{\frac{d}{n}}{1 + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1}},$$

$$o_2 = -\frac{r}{c} = -\frac{\frac{d}{n}}{1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2}}.$$

Si $n > 1$, ces expressions prouvent que, pour une lentille biconcave, les points oculaires sont toujours situés à l'intérieur de la lentille. Il en est du reste de même pour une lentille biconvexe peu épaisse. Si l'épaisseur est faible en comparaison des rayons de courbure, on a pour toute lentille $o_1 = o_2 = -\frac{d}{n}$; ainsi pour une lentille en crown, dont $n = \frac{3}{2}$, les points oculaires sont placés à une distance égale aux $\frac{2}{3}$ de l'épaisseur en arrière de la première surface réfringente et en avant de la deuxième. Le premier point oculaire est donc placé en avant du deuxième. Un point oculaire n'est placé en dehors de la lentille ($n > 1$) que dans le cas où la surface correspondante est convexe, et quand l'épaisseur est plus grande que la deuxième distance focale principale de cette surface. L'exactitude de cette dernière remarque peut être prouvée immédiatement en partant de la définition du deuxième foyer principal. Les foyers principaux sont placés à des distances inégales des surfaces de la lentille. Si l'épaisseur est faible en comparaison des rayons de courbure, la différence est proportionnelle à l'épaisseur et à la différence des rayons de courbure.

Faisons encore remarquer que les points oculaires sont toujours accessibles à l'observation, même dans le cas où ils sont situés à l'intérieur de la lentille ou d'un système optique. Il est toujours possible d'examiner à la loupe ou avec un microscope à long foyer l'image d'une des surfaces terminales formée par le système optique ¹⁾.

¹⁾ La détermination expérimentale de la situation des plans principaux peut se faire en faisant usage de la propriété: que pour cette paire de plans conjugués le grossissement linéaire est égal à 1. M. H. Sentis, (Journal de Physique, (2), VIII, 283, 1889) a indiqué sommairement l'appareil à employer. La recherche expérimentale des plans principaux

Pour une lentille dont l'épaisseur est faible par rapport aux rayons de courbure, on a $c = 1$, $p = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{1}{f}$, $r = 0$, $s = 1$. Ces valeurs ont déjà été déduites au § 6 de la signification des constantes optiques.

Si deux lentilles infiniment minces sont placées à une distance d l'une de l'autre, nous avons, d'après l'équation (II) (§ 4),

$$c = 1 - \frac{d}{f_2}, \quad p = \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2} = \frac{\Delta}{f_1 f_2}, \quad r = d, \quad s = 1 - \frac{d}{f_1}.$$

L'expression Δ représente ce que l'on appelle la distance optique des deux lentilles; c'est l'écartement entre le deuxième foyer principal de la première lentille et le premier foyer principal de la deuxième. Les distances focales principales sont

$$F_1 = -\frac{f_1 (f_2 - d)}{\Delta} = \frac{f_1 (\Delta + f_1)}{\Delta} = f_1 + \frac{f_1^2}{\Delta},$$

$$F_2 = -\frac{f_2 (f_1 - d)}{\Delta} = f_2 + \frac{f_2^2}{\Delta}.$$

Il suit de là que le premier foyer principal du système est placé à une distance $\frac{f_1^2}{\Delta}$ en avant du premier foyer de la première lentille, et que le deuxième est situé à une distance $\frac{f_2^2}{\Delta}$ en arrière du deuxième foyer principal de la deuxième lentille. Cette propriété trouve une application étendue, e. a. dans l'étude des propriétés optiques des microscopes et des objectifs photographiques.

§ 13. *Modification de la divergence des rayons par un système optique.* Nous appellerons divergence de deux rayons lumineux incidents la différence entre les divergences de ces deux rayons. Afin de déterminer cette différence sans ambiguïté, nous retrancherons la divergence du rayon ayant la plus petite amplitude de la divergence du rayon ayant la plus grande amplitude. La détermination du signe de la divergence des deux rayons incidents se fait donc à l'aide d'une des surfaces réfringentes, notamment de la

ne peut être toutefois très pratique (Bouty, Journal de Physique, VII, 332, 1878). Quant à la deuxième propriété des plans principaux, d'après laquelle le grossissement angulaire $V_a = 1$, ($n_1 = 1$) Secretan s'en est servi dans sa „détermination de la distance focale des systèmes convergents. Paris, 1855" (A. Martin, Ann. de Chim. et de Physique, (4), X, 344, 1867). Il ne m'a été pas possible de consulter cet ouvrage.

première. La divergence est ainsi positive lorsque le point d'intersection des rayons, c.-à.-d. le point lumineux, est placé en avant de la première surface réfringente, elle est négative si le point lumineux est virtuel. La divergence des rayons émergents conjugués se détermine d'une façon analogue à l'aide de la dernière surface réfringente. Nous retranchons la divergence du rayon ayant la plus petite amplitude finale de la divergence de l'autre rayon. Tout comme pour les rayons incidents, la divergence des rayons émergents est positive, si l'image se forme du côté de la surface réfringente terminale d'où vient la lumière, donc positive pour une image virtuelle, négative pour une image réelle. Nous dirons maintenant qu'un système est convergent si la divergence de deux rayons quelconques, indépendamment de la situation du point lumineux, diminue par le passage des rayons à travers le système optique. Or, voyons si de tels systèmes existent.

Distinguons les deux cas où les amplitudes initiale et finale A_1 et A_2 sont de même signe ou de signe contraire. Soient D_1 et D_1' les divergences des deux rayons incidents; A_1 et A_1' leurs amplitudes. Si $A_1 > A_1'$, la divergence des deux rayons est $D_1 - D_1'$.

La deuxième équation fondamentale donne $\frac{A_r}{A_1} = r \frac{D_1}{A_1} + s =$

$\frac{r}{x_1} + s$. Pour tous les rayons émis par un même point lumineux,

ou par des points lumineux situés dans un même plan normal à l'axe, le rapport entre les amplitudes finale et initiale est donc le même. Représentons par D_r et D_r' les divergences des rayons émergents, et par A_r et A_r' leurs amplitudes. Si $\frac{A_r}{A_1} > 0$, nous

avons $A_r > A_r'$, puisque nous avons supposé $A_1 > A_1'$. La divergence des rayons émergents est donc $D_r - D_r'$. Si $\frac{A_r}{A_1} < 0$, on a $A_r < A_r'$

et la divergence est $D_r' - D_r$. Dans le cas où $\frac{A_r}{A_1} < 0$,

nous prenons les rayons incidents et émergents dans l'ordre inverse, pour chercher la différence entre leurs divergences et trouver ainsi la divergence des deux rayons.

Soit d'abord $\frac{A_r}{A_1} > 0$. La condition de convergence des rayons

est $D_r - D_r' < D_1 - D_1'$, Comme $V_a = \frac{D_r - D_r'}{D_1 - D_1'}$, nous aurons

donc, pour un système convergent

— $\infty < V_a = c + px_1 < 1$, si $D_1 - D_1' > 0$, c.à.d. $x_1 > 0$
 et $\infty > V_a = c + px_1 > 1$, si $D_1 - D_1' < 0$, „ $x_1 < 0$.

Les valeurs de V_a sont négatives si à l'émergence les rayons vont aboutir à un foyer réel. V_a a des valeurs positives si le foyer des rayons émergents est virtuel. La condition de convergence peut donc s'écrire :

$c < 1, p < 0$, pour $x_1 > 0$,
 et $c > 1, p < 0$, „ $x_1 < 0$.

Prenons maintenant le cas où $\frac{A_r}{A_1} < 0$. La condition de convergence est $D_r' - D_r < D_1 - D_1'$. Comme $V_a = \frac{D_r - D_r'}{D_1 - D_1'}$, il sera satisfait à cette condition, si

+ $\infty > V_a = c + px_1 > -1$, pour $D_1 - D_1' > 0$
 et — $\infty < V_a = c + px_1 < -1$, pour $D_1 - D_1' < 0$, ou bien
 $c > -1, p > 0$, pour $x_1 > 0$
 et $c < -1, p > 0$, „ $x_1 < 0$.

Il résulte de là que les conditions de convergence sont contradictoires si l'on peut avoir $x_1 \geq 0$, c.à-d. si le point lumineux peut être aussi bien réel que virtuel. Il en est de même si l'on peut avoir $\frac{A_r}{A_1} \geq 0$. Comme $\frac{A_r}{A_1} = \frac{r}{x_1} + s_1$, on a

$\frac{A_r}{A_1} > 0$ pour $x_1 > 0$, si $r > 0, s > 0$ et
 pour $x_1 < 0$, si $r < 0, s > 0$, tandis que
 $\frac{A_r}{A_1} < 0$ pour $x_1 > 0$, si $r < 0, s < 0$, et
 pour $x_1 < 0$, si $r > 0, s < 0$.

Les dernières conditions prouvent que ce n'est que dans le cas où $r = 0$ que le rapport $\frac{A_r}{A_1}$ conserve le même signe, aussi bien pour des valeurs positives de x_1 que pour des valeurs négatives ; c.à-d. aussi bien pour des points lumineux réels que pour des points lumineux virtuels. C'est ce qui arrive dans le cas d'une surface réfringente unique ou d'une lentille infiniment mince ¹⁾.

¹⁾ Un système composé de deux lentilles infiniment minces, placées à une distance supérieure à la somme de leurs distances focales principales, nous donne l'exemple d'un système où, pour $x_1 > 0$, A_1 et A_r n'ont pas toujours le même signe, tandis que

Afin que la contradiction entre les conditions de convergence pour des points lumineux réels et virtuels disparaisse, il faut que l'on ait $c = 1$ pour $\frac{A_r}{A_1} < 0$, et $c = -1$ pour $\frac{A_r}{A_1} < 0$.

Le premier cas se présente dans les lentilles infiniment minces; quant au deuxième il ne répond à aucun système optique existant, et n'a certainement aucune signification pratique si l'on doit avoir en même temps $r = 0$.

Parmi tous les systèmes optiques il n'y a donc que les lentilles infiniment minces qui puissent être convergentes ou divergentes dans le sens que nous venons d'attribuer à ces mots, aussi bien pour des points lumineux réels que pour des points lumineux virtuels. Nous retrouvons ainsi pour les lentilles infiniment minces les conditions déjà connues de convergence $p < 0$, et de divergence $p > 0$. Parmi les autres systèmes optiques les uns ne sont convergents que pour des points lumineux réels, les autres pour des points virtuels.

Nous considérerons encore les systèmes optiques formés par une seule surface réfringente. Dans ce cas $\frac{A_r}{A_1} > 0$; or on reconnaît facilement à la condition de convergence, qu'une surface réfringente tournant sa convexité vers le premier milieu qui est le moins dense, n'est convergent que pour des points lumineux réels; et qu'une surface concave du côté du premier milieu, qui est le plus dense, n'est convergente que pour des points lumineux virtuels. Dans le deuxième cas le système n'est pas convergent pour tout point lumineux réel, mais uniquement pour ceux qui sont plus éloignés de la surface réfringente que le centre de courbure, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître sur une simple figure.

Ajoutons encore que parmi les cas d'une surface réfringente unique sont divergents: une surface tournant sa convexité vers le premier milieu qui est le plus dense, pour un faisceau divergent, et une surface concave du côté du premier milieu, qui est le moins dense, pour tous les faisceaux convergents.

§ 14. *Situation des foyers principaux.* Si la situation des foyers principaux est connue, il n'est pas encore possible de trouver pour tout point lumineux le changement de divergence, ainsi qu'il a été dé-

pour $x_1 < 0$ les signes sont toujours différents. Si la distance des lentilles est plus petite que la distance focale principale de la première lentille, on a pour $x_1 > 0$, $\frac{A_r}{A_1} > 0$; mais si $x_1 < 0$, A_r et A_1 n'ont pas toujours le même signe.

terminé au § 13, mais il est possible de déterminer pour quels points lumineux réels l'image est réelle. Nous distinguerons trois cas.

Si le premier foyer principal F_1 est situé en avant, le deuxième F_2 en arrière du système, tout point lumineux, placé en avant du foyer F_1 donne une image réelle. Cela résulte immédiatement du fait que le point lumineux et son image se déplacent dans le même sens (§ 10). Tel est le cas pour un système de deux lentilles convergentes, dont la distance est plus grande que la somme des distances focales principales, ou moindre que la plus petite d'entre elles.

Comme second cas nous considérerons celui où F_1 est placé en avant de la première surface réfringente, F_2 en avant de la dernière. Dans ce cas tout point lumineux placé entre le premier point oculaire et le premier foyer principal donne un faisceau réfracté convergent. Le premier point oculaire est situé en avant du premier foyer principal. En effet, les images de ces deux points sont respectivement placées au sommet de la dernière surface réfringente et à l'infini en arrière du système; et comme la première image est située devant la deuxième, on voit que le premier point oculaire est placé devant le premier foyer principal. Toutefois, comme on le reconnaît facilement, ceci n'est vrai que pour autant que le deuxième foyer principal ne soit pas situé derrière le système. On y arrive aussi en partant des relations $o_1 = -\frac{r}{s} F_1 = -\frac{c}{p}$, et $cs - pr = n_{a.1}$. Il résulte de là que $o_1 > F_1$, si p et s ont le même signe, c.-à.-d. si $F_2 = -\frac{s}{p} < 0$, le deuxième foyer principal se trouvant en avant de la dernière surface réfringente. Un exemple nous est fourni par un système formé de deux lentilles, l'une convergente, l'autre divergente, dont la distance est supérieure à la distance focale principale de la lentille convergente.

Le troisième cas est celui où F_1 est placé derrière la première surface, F_2 devant la dernière. Dans ce cas, les points lumineux donnant des images réelles, sont placés entre le premier point oculaire et la première surface réfringente. Si le premier point oculaire est placé en arrière de la première surface réfringente, il n'y a pas de point lumineux réel donnant une image réelle. Ce troisième cas est fourni par un système de deux lentilles convergentes, dont la distance est plus petite que la somme des distances focales principales, mais plus grande que la plus grande d'entr'elles.

Les autres cas possibles, comme F_1 derrière la première surface

et F_2 derrière la dernière, peuvent être ramenés aux trois cas précédents par renversement du système. Les situations des foyers principaux et des points oculaires nous apprennent donc dans quels cas un point lumineux réel fournit une image réelle. Pour un système composé de deux lentilles infiniment minces nous allons discuter les situations de ces quatre points remarquables. Nous représenterons par f_1 et f_2 les distances focales principales des deux lentilles, et par d leur distance. D'après le § 12 :

$$F_1 = -\frac{f_1(f_2 - d)}{\Delta} = \frac{f_1(\Delta + f_1)}{\Delta}, \quad F_2 = -\frac{f_2(f_1 - d)}{\Delta} = \frac{f_2(\Delta + f_2)}{\Delta},$$

où $\Delta = d - f_1 - f_2$; cette dernière expression est ce qu'on nomme la distance optique des deux lentilles. Nous considérerons deux cas : celui où $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$, et celui où $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$.

1^{er} cas : $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$.

On aura $F_1 > 0$ et $F_2 > 0$ pour toutes les valeurs positives de Δ , et même pour toutes les valeurs négatives, si du moins la valeur absolue de Δ est supérieure à la plus grande des distances focales principales f_1 et f_2 . Si donc nous admettons $f_2 > f_1$, il faut $d > f_1 + f_2$ et $d < f_1$.

On a $F_1 > 0$, $F_2 < 0$, si Δ est négatif, avec une valeur absolue plus grande que f_1 et plus petite que f_2 , de sorte que $f_2 > d > f_1$. Si l'on admettait $f_2 < f_1$ ce cas ne peut se présenter. Il en est de même si $\Delta > 0$.

On aura $F_1 < 0$, $F_2 < 0$, si Δ est négatif avec une valeur absolue inférieure à la plus petite des deux grandeurs f_1 et f_2 . Si f_1 est la plus petite distance focale, on a alors $f_2 < d < f_1 + f_2$.

2^{me} cas : $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$.

$F_1 > 0$ et $F_2 > 0$ pour toute valeur positive de Δ inférieure à $-f_2$, donc pour $f_1 > d > f_1 + f_2$. $\Delta < 0$ ne correspond à aucune valeur positive de F_1 ou de F_2 . Comme d n'est jamais négatif, la deuxième lentille étant toujours située derrière la première, ce cas ($\Delta < 0$) ne peut se présenter si $f_1 < -f_2$.

On a $F_1 > 0$ et $F_2 < 0$, si $\Delta > -f_2$, ou bien $d > f_1$. Ces circonstances ne sont guère réalisables pour des valeurs négatives de Δ .

Enfin $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$ n'est possible que si Δ est négatif, donc $d < f_1 + f_2$, si en même temps $f_1 > -f_2$.

Comme on a en général $o_1 = -\frac{r}{s}$ et $o_2 = -\frac{r}{c}$, on peut écrire pour un système composé de deux lentilles infiniment minces (§ 12) $o_1 = -\frac{d}{1 - \frac{d}{f_1}}$, $o_2 = -\frac{d}{1 - \frac{d}{f_2}}$. Ces relations, aussi bien

que la définition des points oculaires, nous permettent de trouver facilement la situation de ces points dans les différents cas possibles. Pour la détermination des points lumineux réels dont l'image est réelle, les points oculaires n'ont d'importance que dans les cas où $F_1 > 0$, $F_2 < 0$ et $F_1 < 0$, $F_2 < 0$. Si $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$, on n'a $F_1 > 0$ et $F_2 < 0$ que dans le cas où $f_2 > d > f_1$. Dans ce cas le premier point oculaire est placé en avant du système, comme on peut le déduire de la valeur de o_1 , aussi bien que de la définition de ce point oculaire; nous l'avons prouvé d'ailleurs plus haut d'une autre façon. La valeur de o_1 nous apprend en outre que le premier point oculaire est placé en avant du premier foyer principal.

Si $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, on a $F_1 < 0$, $F_2 < 0$, pour $f_2 < d < f_1 + f_2$ et $f_1 < f_2$. Le premier point oculaire est placé en avant de la lentille, de sorte qu'il y a des points lumineux réels ayant une image réelle.

Soit maintenant $f_1 > 0$, $f_2 < 0$. On a $F_1 > 0$, $F_2 < 0$, pour $d > f_1$. Dans ce cas le premier point oculaire est placé en avant du système. Ce point se trouve en arrière du système si $F_1 < 0$, $F_2 < 0$, donc pour $0 < d < f_1$. Dans ce dernier cas il n'y a point d'image réelle pour des rayons incidents divergents.

Si l'on tient compte de l'épaisseur des lentilles, on trouve, au moyen des constantes optiques d'une lentille à épaisseur finie, pour un système de deux lentilles à la distance d :

$$F_2 = f'_2 \frac{d - o_2 - f'_1}{d - f'_1 - f_2}, \quad F_1 = f_1 \frac{d - o'_1 - f_2}{d - f'_1 - f_2},$$

$$O_2 = f'_2 \frac{d - o'_1 - o_2}{d - o'_1 - f_2}, \quad O_1 = f_1 \frac{d - o'_1 - o_2}{d - o_2 - f'_1}.$$

Dans ces expressions f_1 et f'_1 sont les foyers principaux de la première lentille, f_2 et f'_2 ceux de la deuxième; de même o_1 et o'_1 sont les distances des points oculaires de la première lentille, o_2 et o'_2 celles de la deuxième. La signification des expressions dans les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions est facile à trouver. Ainsi $d - o_2 - f'_1$ représente l'écartement entre le deuxième foyer principal de la première lentille et le premier point oculaire de la deuxième; $d - f'_1 - f_2$ est encore une fois la distance optique des lentilles. Les valeurs trouvées satisfont à la relation $\frac{F_1}{F_2} = \frac{O_1}{O_2}$, qui d'après le § 9 est applicable à tout système optique.

Les constantes optiques d'un système de surface réfringentes formé par la combinaison de deux ou plusieurs autres systèmes,

sont appelées constantes du système équivalent. Un système ayant ces constantes, et dont les surfaces extrêmes coïncident avec la première surface du premier système et la dernière surface du dernier, peut remplacer le système donné au point de vue des propriétés géométriques (position et grandeur) des images. Pour que l'équivalence existe aussi au point de vue des propriétés physiques (intensité etc.) de l'image, nous verrons dans la suite que d'autres conditions encore doivent être remplies.

§ 15. *Systèmes télescopiques.* On donne le nom de systèmes télescopiques ¹⁾ à des systèmes dont les distances focales principales sont infiniment grandes. Telle est une lunette astronomique, réglée pour un observateur à oeil emmétrope. L'oeil est dit emmétrope lorsque la rétine, sur laquelle se forme l'image, est conjuguée d'un plan placé à une distance infinie en avant de l'oeil. D'après les valeurs des distances focales principales (§ 9) on a, pour un système télescopique, $p = 0$. Cette relation peut d'ailleurs être déduite de la première équation fondamentale. Si les distances focales principales sont infiniment grandes, un faisceau de rayons incidents parallèles donne un faisceau de rayons émergents également parallèles. Cela résulte encore de la deuxième équation fondamentale qui, pour $p = 0$, devient $D_r = c D_1$. La divergence finale ne dépend donc plus de l'amplitude du rayon incident, mais uniquement de sa divergence. Des rayons incidents parallèles restent donc parallèles après réfraction. D_r n'est égal à D_1 que si $D_1 = 0$, c. à. d. si les rayons incidents sont parallèles à l'axe. Si $D_1 \geq 0$, les axes des faisceaux cylindriques incidents et réfractés forment entre eux l'angle $(p - 1) D_1$. Si la section normale du faisceau de rayons incidents est circulaire, il en est de même du faisceau émergent; le rayon de cette dernière section est s fois plus grande que le rayon de la première, comme on peut le déduire immédiatement de la signification de s (§ 3). Si $D = 0$, le grossissement linéaire $V = s + p x_2$ (§ 8) devient $V = s$, c. à. d. égal au pouvoir dilatatant et est donc indépendant de la distance de l'objet au système réfringent. Le grossissement linéaire est donc égal au rapport des rayons des sections normales des deux faisceaux cylindriques considérés tantôt. Ceci résulte d'ailleurs immédiatement de cette circonstance, qu'un rayon incident parallèle à l'axe donne un rayon réfracté également parallèle à l'axe. Si des extrémités de l'objet on mène des rayons parallèles à l'axe, leur distance est égale à la

¹⁾ Violle (Cours de Physique) désigne ces systèmes sous le nom de systèmes afocaux.

grandeur de l'objet. La distance des rayons émergents correspondants est égale à son tour à la grandeur de l'image, et celle-ci est s fois plus grande que l'objet, d'après la signification de la constante s . Ces considérations conduisent à la méthode suivante de détermination du grossissement d'un système télescopique. Nous limitons le faisceau cylindrique de rayons incidents par un diaphragme circulaire placé quelque part en avant du système, et mesurons les rayons des sections normales des faisceaux incident et réfracté.

Si $p = 0$, le grossissement angulaire $V_a = c + p x_1$ devient $V_a = c$. Cette valeur de $V_a = \frac{D_r}{D_1}$ peut, dans le cas où $p = 0$, se déduire immédiatement de la première équation fondamentale. Comme pour tout système $V = \frac{n_{a,1}}{V_a}$, on a pour un système télescopique $c = \frac{n_{a,1}}{s}$. On y arrive aussi en posant $p = 0$ dans $n_{a,1} = cs - pr$ (§ 7).

Bien que les distances focales principales soient infiniment grandes, leur rapport a une valeur finie; en effet, $\frac{F_1}{F_2} = \frac{c}{s} = \frac{n_{a,1}}{s^2} = \frac{c^2}{n_{a,1}}$.

Quand il s'agit de déterminer la position de l'image les foyers principaux sont sans utilité, mais on peut se servir avec avantage des points oculaires. Le grossissement axial est $V_{ax} = - \frac{V V'}{n_{a,1}}$

(§ 10), ou bien, comme $V = V' = s$, $V_{ax} = - \frac{s^2}{n_{a,1}}$. Comme le

premier point oculaire et le sommet de la dernière surface réfringente sont des points conjugués, la distance de l'image à la surface terminale est $\frac{s^2}{n_{a,1}}$ fois plus grande que la distance de l'objet au premier point oculaire. Le signe négatif du grossissement axial signifie (§ 10) que l'objet et l'image sont situés du même côté, l'objet du premier point oculaire, l'image de la dernière surface réfringente. Les images sont donc réelles, si l'objet est situé entre la première surface réfringente et le premier point oculaire.

La relation trouvée entre les constantes optiques c et s : $c = \frac{n_{a,1}}{s}$, nous allons la démontrer directement pour un système télescopique, formé par la combinaison de deux systèmes non télescopiques. D'après § 4 nous avons, pour le système composé $p = p_1 (c_2 + p_2 d) + s_1 p_2$, de sorte que, $p = 0$ si

$d = -\frac{s_1 p_2 + c_2 p_1}{p_1 p_2} = -\frac{s_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2}$. Si l'on fait attention aux valeurs des distances focales principales (§ 9), cette relation nous apprend que la distance des deux systèmes doit être égale à la somme de la deuxième distance focale principale du premier système et de la première distance focale principale du deuxième système. Le deuxième foyer principal du premier système doit donc coïncider avec le premier du deuxième système. Cette condition aurait pu être trouvée dès l'abord, en effet, elle exprime que le système résultant est télescopique. Or si l'on substitue la valeur trouvée pour d dans les expressions de c et s pour le système composé (§ 4), nous obtenons $c = \frac{p_2}{p_1} (p_1 r_1 - c_1 s_1)$ et $s = \frac{p_1}{p_2} (p_2 r_2 - c_2 s_2)$. Si maintenant, nous distinguons les milieux extrêmes du premier système par les indices 1 et a' , et par a' et a ceux du deuxième système, il vient (§ 7)

$$p_1 r_1 - c_1 s_1 = -n_{a'A}, \quad p_2 r_2 - c_2 s_2 = -n_{a.a'}$$

d'où $cs = n_{a'A} \cdot n_{a.a'} = n_{a.A}$ c. à d. la relation cherchée entre c et s . Si les milieux extrêmes des deux systèmes optiques sont identiques, on a $cs = 1$, $c = -\frac{p_2}{p_1}$, $s = -\frac{p_1}{p_2}$, et l'on retrouve ainsi les relations connues, déterminant le grossissement d'une lunette astronomique.

Si les systèmes, formant par leur combinaison un système télescopique, sont des lentilles infiniment minces, on a $p_1 = -\frac{1}{f_1}$,

$p_2 = -\frac{1}{f_2}$, donc $c = -\frac{f_1}{f_2}$. Ce résultat encore peut être immédiatement déduit des propriétés des lentilles infiniment minces.

On peut en effet, ou bien calculer la relation constante entre les divergences des rayons incidents et réfractés, en partant des grossissements angulaires des lentilles prises individuellement, ou bien, ce qui est encore plus simple, partir de la signification de la constante c . De la deuxième façon on arrive immédiatement à $s = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{f_2}{f_1}$ et $r = -\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ ou $r =$

$f_1 + f_2$. La distance du premier point oculaire est donc $-\frac{r}{s} =$

$\frac{f_1^2}{f_2} + f_1$. Seuls des objets plus rapprochés du système que ce point oculaire donnent des images réelles. Parmi les propriétés particulières d'un tel système télescopique, composé de deux lentilles infi-

niment minces, nous citerons encore la suivante. Si la distance de l'objet est $f_1 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}$, l'image se forme dans le plan même de l'objet, elle est virtuelle, renversée et grossie $\frac{f_2}{f_1}$ fois.

II. Propriétés physiques des images. Délimitation des faisceaux lumineux. Clarté des images et profondeur de l'espace objet ou profondeur du champ.

§ 16. *Influence des diaphragmes sur la délimitation des faisceaux lumineux. Champ visuel.* Les faisceaux lumineux qui participent à la formation de l'image sont ordinairement délimités par des diaphragmes. Les bords des surfaces réfringentes (bords des lentilles) remplissent ce rôle dans le cas où il n'y a pas de diaphragmes proprement dits. Dans les cas où les rayons incidents ne sont pas tous centraux, l'usage des diaphragmes est nécessaire pour obtenir des images nettes. Leur utilité est double, en premier lieu ils réduisent le faisceau incident, et en second lieu ils affectent à chaque faisceau une portion déterminée des surfaces réfringentes. Ce second avantage est toutefois sans importance si l'on ne considère que des rayons centraux. Néanmoins, l'influence de la délimitation des faisceaux lumineux sur leur marche à travers le système, la clarté de l'image et la profondeur de l'espace objet peut être développée dans la théorie de la reproduction optique par rayons centraux. Il résulte d'ailleurs de ce développement que, si des rayons marginaux participent à la formation de l'image, les résultats ne doivent subir de modification que dans le cas où la formation de l'image est imparfaite à cause de l'aberration de sphéricité.

Cette partie de la reproduction optique a été traitée spécialement par M. ABBE ¹⁾. Nous nous représenterons toujours les diaphragmes

¹⁾ Voir e. a. ABBE, Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung, Max Schultze's Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. IX, 1872, p. 419 et suiv.

ABBE, Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder; Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft, 1878. La théorie des instruments d'optique d'après M. Abbe a été exposée dans l'ouvrage de M. Czapski, Theorie der Optischen Instrumente nach Abbe, 1893. Cet ouvrage a aussi paru dans le „Handbuch der Physik”, publié par A. Winkelmann, faisant partie de Bd. II.

comme des ouvertures circulaires, dont le centre se trouve sur l'axe optique. Soit donc P une telle ouverture placée devant le système. Les diverses surfaces réfringentes ou parties du système, comme les lentilles d'un microscope ou d'une lunette, forment une série d'images, aussi bien du diaphragme P que de l'objet. M. Abbe commença par donner à la première série d'images le nom d'„Öffnungsbilder”, plus tard il leur donna le nom de pupilles ¹⁾. Un rayon émis par un point quelconque de l'objet, passant par un point L du diaphragme P , coupe successivement les diverses pupilles en des points conjugués de L . Si L fait partie du bord du diaphragme P , les images de L sont également situées sur les bords des pupilles. Il résulte de là que le faisceau lumineux émis par un point de l'objet est limité, dans son parcours à travers le système, successivement par les diverses pupilles. La première pupille c. à d. le diaphragme placé devant le système, porte le nom de pupille d'entrée. La dernière, c. à d. l'image du diaphragme formée par le système entier, s'appelle pupille de sortie. Considérée comme image, cette pupille de sortie peut être réelle ou virtuelle. Si plusieurs diaphragmes sont placés devant le système, c'est celle qui est vue de l'objet sous le plus petit angle qui détermine l'ouverture du faisceau incident. Le système entier forme de ces ouvertures une série d'images dont celle-là délimite le faisceau émergent, et est donc la pupille de sortie, qui est vue de l'image sous le plus petit angle. Les pupilles d'entrée et de sortie sont toujours conjuguées par rapport au système entier. En effet si le diamètre apparent, sous lequel la pupille d'entrée est vue d'un point de l'objet, est $2 D_1$, l'angle sous lequel la pupille de sortie est vue du point conjugué de l'image est $2 D_r$, tel que $D_r = V_a \cdot D_1$. Or, V_a est le même pour tous les points de l'image situés dans un même plan normal à l'axe; et comme nous venons de supposer que de toutes les ouvertures c'est la pupille d'entrée qui est vue sous le plus petit angle D_1 , il résulte de cette relation que la valeur de D_r est la plus petite pour l'image de la pupille d'entrée. C'est donc bien cette image qui est la pupille de sortie.

Il se peut aussi que le diaphragme soit placé non pas devant le système mais à l'intérieur. Il sépare alors le système en deux parties que nous distinguerons par S_1 et S_2 . La pupille d'entrée est alors l'image du diaphragme formée par S_1 , la pupille de sortie

¹⁾ Voir ABBE, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Oculars nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bedingungen mikro-stereoskopischer Beobachtung. Carl's Repertorium für Experimentalphysik, Bd. XVII, 1881.

l'image formée par S_2 . A leur tour les deux pupilles d'entrée et de sortie sont conjuguées par rapport au système $S_1 + S_2$.¹⁾

Dans les microscopes et les lunettes ce sont les bords de la première surface (bords de la première lentille) qui forment les pupilles d'entrée. La pupille de sortie est alors située dans le deuxième plan oculaire, et est limitée par le deuxième anneau oculaire (§ 9).

Les pupilles nous permettent en outre de suivre la marche des rayons lumineux qui participent à la formation de l'image. Chaque point de l'objet émet un faisceau conique de rayons lumineux, dont la directrice est le bord de la pupille d'entrée. De même le bord de la pupille de sortie est la directrice du cône de rayons réfractés ayant pour sommet l'image du point considéré. Comme nous considérons toujours des ouvertures circulaires, les sections normales à l'axe des faisceaux incidents et réfractés sont toutes circulaires. Ces cônes de rayons sont symétriques par rapport aux rayons passant par les centres des pupilles, rayons que l'on pourrait appeler principaux. La marche de ces rayons principaux représente donc la marche de tout le système de rayons.

Les divers faisceaux coniques émergents, provenant chacun d'un point de l'objet, se coupent mutuellement dans la pupille de sortie. Cette pupille est la plus petite section du système total de rayons émergents. Pour voir une portion aussi grande que possible de l'image, il faudra donc faire coïncider la pupille de l'œil — ou plus exactement l'image de cette pupille formée par la cornée et l'humeur aqueuse — avec la pupille de sortie. Dans ce cas la grandeur du champ reste la même, que la pupille de l'œil soit plus petite ou plus grande que la pupille de sortie. Dans le premier cas l'éclairement de l'image est seul diminué, puisque de tous les faisceaux coniques il ne pénètre qu'une même portion dans l'œil.

Pour rendre cet exposé plus complet encore, nous allons chercher l'influence des ouvertures des diaphragmes sur l'étendue du champ visuel. Si en dehors de la pupille d'entrée, il y a encore un autre diaphragme, ce second diaphragme réduit le champ visuel. Menons en effet par la pensée deux cônes tangents à ces deux ouvertures, l'un intérieurement, l'autre extérieurement. D'un

¹⁾ Bien que cette partie de la reproduction optique ait été développée complètement pour la première fois par Abbe, il va de soi que d'autres auteurs ont déjà donné des considérations analogues avant lui. Voyez p. ex. la façon dont HELMHOLTZ (*Physiologische Optik*, 1^e Aufl., p. 99 et suiv., 2^e Aufl., p. 126 et suiv.) détermine le cercle de diffusion sur la rétine. On en trouverait sans doute d'autres exemples encore.

point de l'objet situé en dehors du cône tangent intérieurement aucun rayon ne participera à la formation de l'image, puisque ces rayons sont arrêtés par le second diaphragme avant d'atteindre le système optique. Les points situés dans le cône tangent extérieurement donnent les images les mieux éclairées, puisque l'écran n'arrête aucun rayon allant vers la pupille d'entrée. Du centre de la pupille d'entrée menons un cône tangent à l'ouverture de l'écran; ce cône découpe un cercle dans le plan de l'objet. Pour tous les points du cercle la moitié des rayons allant vers la pupille d'entrée sont interceptés par l'écran. On peut ainsi distinguer dans l'objet trois parties; l'une reproduite avec une intensité lumineuse maxima, une autre où l'éclairement diminue jusqu'à la moitié de l'intensité maxima, une troisième où cette intensité diminue davantage jusqu'à devenir nulle ¹⁾. S'il y a plusieurs diaphragmes, cette ouverture là détermine le champ visuel qui est vue du centre de la pupille d'entrée sous le plus petit angle. Afin que tous les points de l'objet forment des images également claires, il faut que l'écran déterminant le champ visuel soit situé dans le plan de l'objet. Tel est le cas pour les lunettes astronomiques où l'on place le diaphragme dans le plan de l'image formée par l'objectif.

Comme mesure de la grandeur du champ on peut donner la divergence du rayon principal mené par le bord de l'ouverture déterminant le champ visuel. Le champ contient ainsi les points de l'objet dont la clarté est au moins la moitié de la clarté maxima. A cet angle correspond dans l'espace de l'image, la divergence du rayon principal réfracté, passant par le milieu de la pupille de sortie, c. à d. l'angle embrassé ²⁾.

Dans une loupe c'est la pupille de l'œil, en général plus petite que l'ouverture de la lentille, qui fonctionne comme pupille de sortie, et l'ouverture de la lentille, qui coïncide avec sa propre image, est l'ouverture de l'écran qui détermine à la fois le champ visuel et l'angle embrassé. De l'espace de l'image on observe la portion comprise dans les cônes tangents à ces deux ouvertures. On peut encore dire que l'œil observe l'espace image à travers la lentille comme deuxième ouverture. Si la pupille de l'œil peut être amenée dans le plan de la pupille de sortie de l'instrument optique, la pupille de l'œil est sans influence sur la grandeur du champ, qui dans ce cas est

¹⁾ M. Violle désigne les trois parties sous les noms de champ de pleine lumière, champ de visibilité et champ extrême. Cours de physique, T II p. 614, 635.

²⁾ Wallon, Traité élémentaire de l'objectif photographique, p. 151; Choix et usage des objectifs photographiques, p. 96.

déterminée par les ouvertures des diaphragmes du système optique. Quant à l'influence de la pupille de l'oeil sur l'éclairement, nous venons de la traiter sommairement.

§ 17. *Grossissement*. — La définition du grossissement peut être donnée de plusieurs manières. En premier lieu on peut entendre par là le rapport entre les dimensions conjuguées de l'image et de l'objet. Cette définition s'applique au cas où le système optique forme une image réelle. Le grossissement ainsi défini est représenté par V . D'après le § 9, $V = p \xi_2$.

Si le système optique forme des images virtuelles, on peut entendre par grossissement le rapport des dimensions correspondantes des images rétinienne de l'objet et de son image formée par le système optique. Plus grande en effet l'image rétinienne, plus nombreux aussi les détails que l'oeil peut distinguer dans l'objet. Il est toutefois nécessaire de déterminer alors à quelles distances l'objet et l'image doivent être placés devant l'oeil. Si on les place à la même distance nous verrons que l'on retrouve le grossissement V . Dans le troisième chapitre nous ferons voir que la grandeur de l'image rétinienne d'une dimension de l'objet est proportionnelle à la différence entre les divergences des rayons principaux, émis par les deux extrémités de cette dimension et pénétrant dans l'oeil. Ces rayons principaux passent par le centre de la pupille de l'oeil, ou plus exactement par le centre de l'image qu'en forment la cornée et l'humeur aqueuse. Soit A la distance à laquelle l'objet et son image sont placés en avant de l'oeil; nous choisissons une distance telle que les images rétinienne soient nettes. Si y_2 et y_1 sont des dimensions conjuguées de l'image et de l'objet, on a pour grossissement, tel qu'il vient d'être défini $\frac{y_2}{A} : \frac{y_1}{A} = \frac{y_2}{y_1} = V$.

Le grossissement $V = p \xi_2$ dépend de la constante optique p et de la distance ξ_2 de l'image au deuxième foyer principal du système optique. L'observateur fera toujours coïncider le centre de la pupille de l'oeil avec celui de la pupille de sortie, afin d'observer une portion aussi grande que possible du champ, et de recevoir dans l'oeil autant que possible tous les rayons qui concourent à la formation de l'image. Si l'on obtient la netteté de l'image en réglant la distance de l'objet au système optique, comme pour une loupe ou un microscope, la distance de la pupille de sortie aux deux foyers principaux reste la même. Si pour deux observateurs l'image n'est également nette que si l'objet est placé à des distances différentes de l'oeil, ξ_2 , donc aussi le grossissement n'auront pas la même valeur pour les deux observateurs, La dis-

tance, à laquelle la vision est nette, est moindre pour un oeil myope que pour un oeil emmétrope. ¹⁾

Si la distance de l'objet devient infiniment grande, il n'est pas possible de déterminer les dimensions de l'objet, mais bien les angles sous lesquels ces dimensions s'observent. Ces angles sont les différences de divergence des rayons principaux menés par les extrémités des dimensions. On peut maintenant déterminer le grossissement comme rapport des angles sous lesquels on voit deux dimensions correspondantes de l'objet et de l'image, puisque les dimensions des images rétinienne sont proportionnelles à ces angles. En considérant l'image, l'oeil est placé dans la pupille de sortie du système optique. Dans les observations à l'oeil nu, l'oeil peut occuper une situation quelconque. Plaçons donc l'oeil dans la pupille d'entrée du système optique. Le rapport des angles sous lesquels s'observent deux dimensions conjuguées de l'objet et de l'image est égal au rapport des divergences de deux rayons principaux menés des extrémités de la dimension ²⁾. Ce rapport des divergences est le grossissement angulaire dans le plan de la pupille de sortie (§ 10). Si la pupille d'entrée coïncide avec la première lentille, la pupille de sortie est située dans le deuxième plan oculaire, de sorte que le grossissement angulaire prend la valeur qu'il a au deuxième point oculaire, soit c (§ 3). Si les milieux extrêmes sont identiques, le grossissement angulaire est l'inverse du grossissement linéaire (§ 10). Pour une distance infiniment grande de l'objet, et $n_{a,1} = 1$, la pupille d'entrée coïncidant avec la première surface réfringante du système optique, le grossissement tel que nous venons de la définir, est l'inverse du grossissement linéaire dans le deuxième plan oculaire. Cette propriété a été trouvée par LAGRANGE ³⁾. On voit donc qu'il est possible de déterminer la valeur de la constante c , pour tout système où $n_{a,1} = 1$ en mesurant les diamètres du deuxième anneau oculaire et de la première lentille.

Pour des systèmes télescopiques les grossissements angulaire et linéaire sont constants. On retrouve ainsi la méthode, déjà donnée précédemment (§ 15), pour déterminer le grossissement, consistant à placer devant le système une ouverture remplissant le rôle de pupille d'entrée pour des rayons incidents parallèles, et à déter-

¹⁾ Le grossissement ne change pas si l'observateur ne déplace que l'oeil. Toutefois ce déplacement ne peut se faire que dans des limites très étroites, sans quoi le champ deviendrait trop peu étendu.

²⁾ Pour la signification de la divergence de deux rayons, voir § 13.

³⁾ Lagrange, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1803. Voir BOSSCHA, *loc. cit.* p. 97. Note.

miner le rapport des diamètres des pupilles de sortie et d'entrée.

§ 18. *Puissance d'un système optique.* Dans la théorie des systèmes optiques, on introduit encore une grandeur à laquelle on donne le nom de puissance et qui est définie par l'angle sous lequel on voit l'unité de longueur ¹⁾. Cet angle est intimement lié au pouvoir séparateur, déterminé par la finesse des détails que le système optique permet de reconnaître dans l'objet. Nous représenterons la puissance par V .

La puissance est indépendante du pouvoir focal (§ 3) de l'œil de l'observateur, si la pupille de sortie contient le deuxième foyer principal du système optique. Or nous supposons que le centre de l'œil coïncide avec le centre de la pupille de sortie. Dans le cas d'une loupe la pupille de l'œil est la pupille de sortie. Si donc on place l'œil au deuxième foyer principal de la loupe, la condition est remplie. Dans le cas d'un microscope le bord de la première lentille de l'objectif est la pupille d'entrée. Comme dans un microscope la distance optique (§ 12) de l'objectif et de l'oculaire est en général assez grande par rapport aux distances focales principales, la pupille de sortie coïncidera à peu près avec le deuxième plan focal principal du système. Pour des raisons semblables tel est aussi le cas dans une lunette, où l'objectif coïncide avec la pupille d'entrée. Dans ce cas $V = p$. Les rayons principaux des faisceaux émergents passent par le deuxième foyer principal, de sorte que les rayons principaux des faisceaux incidents sont parallèles à l'axe. D'après la signification de la constante optique p , la divergence du rayon principal émergent est p fois plus grande que l'amplitude du rayon incident. La différence des amplitudes des rayons principaux émanés des extrémités de l'unité de longueur de l'objet est égale à l'unité. Cette unité de longueur est donc vue sous l'angle p . La puissance V est donc dans ce cas déterminée uniquement par la constante optique p .

La valeur de la puissance, applicable à tous les cas, peut-être immédiatement déduite de sa définition. Soient y_1 une dimension de l'objet, et y_2 la dimension correspondante de l'image; A la distance de l'image à la pupille de sortie, donc à l'œil. D'après la définition $V = \frac{y_2}{A} : y_1 = \frac{y_2}{y_1} : A = \frac{V}{A}$. Si nous représentons

¹⁾ Cette grandeur a été introduite par VERDET et par ABBE. Voir p. ex. VERDET, Conférences de physique, T. II, p. 945, 946. ABBE, Note on the proper definition and the amplifying power of a lens or lenssystem, Journal of the Royal microscopical Society, Ser. II, Vol. IV, 1884.

par ξ_2 et ξ_2' les distances de l'image et de la pupille de sortie au deuxième foyer principal, $A = \xi_2 - \xi_2'$. Comme $V = p \xi_2$ on a

$V = p \frac{\xi_2}{\xi_2 - \xi_2'}$. Dans beaucoup de cas, comme une lunette ou un

microscope, la pupille de sortie, donc aussi l'oeil, est placée très près du deuxième foyer principal, de sorte que ξ_2 peut être considéré comme la distance de l'image à l'oeil, c. à. d. la distance à laquelle l'oeil est adapté. Cette distance est très grande par

rapport à ξ_2' , de sorte qu'on a approximativement $V = p \left(\frac{1 + \xi_2'}{\xi_2} \right)$,

et même à un degré suffisant d'exactitude $V = p$. Le terme

$p \frac{\xi_2'}{\xi_2}$ peut donc être considéré comme un terme de correction. Pour

une lentille infiniment mince $p = -\frac{1}{f}$ et la correction est $-\frac{1}{f} \frac{\xi_2'}{\xi_2}$,

où l'on peut prendre pour ξ_2 la distance pour laquelle l'oeil est accommodé. Comme pour une lentille infiniment mince unique (loupe), la pupille de l'oeil fonctionne comme pupille de sortie, ξ_2' est la distance de l'oeil au deuxième foyer principal.

Si l'objet est placé à une distance infiniment grande, tous les rayons principaux sont bien parallèles à l'axe, mais on n'a pas, comme nous l'avons trouvé antérieurement pour une telle marche des rayons principaux, $V = p$. Nous avons supposé en effet que l'oeil fût placé au deuxième foyer principal, et tel n'est pas le cas ici,

puisque l'image occupe cette place. De l'expression $V = \frac{p}{1 - \frac{\xi_2'}{\xi_2}}$

il suit que pour une distance infiniment grande de l'objet $V = 0$, puisque $\xi_2 = 0$. ξ_2' ne peut pas être nul, puisque l'oeil est placé dans la pupille de sortie et que cette dernière ne peut pas coïncider avec le deuxième plan focal principal, où se forme l'image.

§ 19. *Eclairement de l'image.* L'objet, considéré comme lumineux, émet des rayons dans toutes les directions. Parmi tous ces rayons, ceux-là seuls qui traversent la pupille d'entrée, contribuent à la formation de l'image. Un point quelconque de l'image n'émet de rayons que dans un cône ayant la pupille de sortie pour directrice. On peut donc considérer l'image aussi comme un objet lumineux, avec cette restriction toutefois que l'émission de lumière se borne à des directions déterminées comprises dans le cône indiqué. Donnons à la quantité totale de rayons qu'un élément de l'objet lumineux émet dans un cône d'ouverture déterminée, d'ail-

leurs arbitraire, le nom de flux lumineux ¹⁾. Tous les rayons émis par l'élément considéré de l'objet sont répandus sur l'élément conjugué de l'image, en supposant qu'il n'y ait pas d'absorption dans les milieux et qu'on néglige la lumière réfléchie. Même en admettant d'autres rayons que des rayons centraux, ces considérations sont encore applicables si les aberrations par lesquelles tous les rayons émis par un même point lumineux ne se réunissent plus en un même point, peuvent être corrigées. En nous servant du terme flux lumineux nous pouvons donc dire que le flux lumineux, émis par un élément de l'objet à travers la pupille d'entrée, est égal au flux lumineux que l'élément conjugué de l'image émet à travers la pupille de sortie.

L'éclat d'une surface lumineuse est déterminée par $e = \frac{\Phi}{\omega}$, Φ étant le flux lumineux émis normalement par l'unité de surface de l'objet lumineux dans un cône d'ouverture ω . Comme la production des images est limitée à des rayons centraux, les ouvertures des cônes de rayons que nous avons à considérer sont si petites, que tous les rayons peuvent être considérés comme normaux aux éléments des surfaces qui émettent et reçoivent la lumière. Dans ce cas l'expression de Φ ne contient pas d'autres grandeurs géométriques que ω , e est le facteur physique dans l'expression du flux lumineux.

Représentons par ξ_1 la distance de l'objet à la pupille d'entrée, et par ξ_2 la distance de l'image à la pupille de sortie; par e_1 l'éclat de l'objet, par e_2 l'éclat de l'image. Le flux lumineux émis par un élément circulaire O_1 de l'objet à travers un élément quelconque S_1 de la pupille d'entrée est $e_1 O_1 \frac{S_1}{\xi_1^2}$. L'élément correspondant O_2 de l'image émet par l'élément conjugué S_2 de la pupille de sortie le flux $e_2 O_2 \frac{S_2}{\xi_2^2}$. Et comme ces deux flux lumineux sont égaux, on a $e_1 O_1 \frac{S_1}{\xi_1^2} = e_2 O_2 \frac{S_2}{\xi_2^2}$, ou bien $e_2 = e_1 \frac{S_1}{S_2} \frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2}$. $\frac{O_1}{O_2}$ est l'ouverture du cône ayant le centre de la pupille d'entrée pour sommet et l'élément O_1 pour base. Cette ouverture est proportionnelle au carré de l'angle au sommet du cône. Cet angle au sommet, formé par deux rayons situés dans un même plan passant par l'axe est égal à la différence des divergences de ces deux rayons.

¹⁾ Le flux lumineux est constant le long d'un faisceau se propageant dans un milieu non absorbant. Il peut être défini comme l'énergie ondulatoire, transmise par une section quelconque du faisceau par unité de temps.

$O_2 : \zeta_2^2$ a une signification semblable, de sorte que $\frac{O_2 : \zeta_2^2}{O_1 : \zeta_1^2}$ est le carré du grossissement angulaire au centre de la pupille de sortie. De même $\frac{S_2}{S_1}$ est le carré du grossissement linéaire au même point. Comme d'après § 10, le produit de ces grossissements est égal à n_{a1} , on a $e_1 = e_2 \times n_{a1}^2$ ¹⁾. Si $n_{a1} = 1$, on a $e_1 = e_2$, c. à. d. que les éléments correspondants de l'objet et de l'image ont le même éclat ²⁾.

La relation que nous venons de trouver entre les éclats de l'objet et de l'image, subsiste encore si la production des images ne se fait pas seulement par des rayons centraux ³⁾. Elle sert de base à la détermination des relations entre l'intensité de points lumineux et la clarté des objets lumineux, qu'on observe avec ou sans instrument d'optique, et à la détermination de l'éclairement de l'espace image. Ces déductions ne subissent aucune modification par la façon dont nous avons développé la production des images par rayons centraux. Il suffira donc de renvoyer à des mémoires connus ⁴⁾.

§ 20. *Profondeur du champ.* Dans un plan déterminé de l'espace image, que nous nous figurons normal à l'axe, et que nous appellerons plan de l'image, un système optique ne forme une image nette que d'un seul plan de l'espace objet, également normal à l'axe. Ce dernier plan nous l'appellerons plan de visée. Les points placés en avant ou en arrière du plan de visée émettent des faisceaux lumineux qui, après réfraction, sont coupés par le plan de l'image, non en un point, mais suivant un cercle que nous appellerons cercle de diffusion. Ces cercles forment une image diffuse des parties de l'espace objet, situées de part et d'autre du plan de visée; à moins que leur diamètre ne soit moindre que la plus petite distance de deux points que l'oeil peut encore distinguer l'un de l'autre. Jusqu'ici on a admis avec Helmholtz que l'angle sous lequel on observe deux pareils points est d'environ 1'; de nouvelles observations sem-

¹⁾ Ce théorème a été démontré pour la première fois par Kirchhoff pour toute espèce de radiations.

²⁾ Voir aussi Violle, Cours de physique, II, 602.

³⁾ KIRCHHOFF, Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme, Monatsber. der Akad. der Wiss., Berlin, 1859. CLAUSIUS, Pogg. Ann., Bd. 21, 1864; Mechanische Wärmetheorie, 2^e Aufl., I, p. 314. HELMHOLTZ, Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope; Pogg. Ann., Jubelband, 1874. ABBE, Ueber die Bestimmung der Lichtstärke optischer Instrumente. Jenaische Zeitschrift für Medicin und Naturwissenschaft, Bd. VI, 1871.

⁴⁾ Abbe, loc. cit.; Helmholtz, loc. cit.; Mascart, Traité d'optique, Tome I, p. 122, 131; Violle, loc. cit., Chap. V (II).

blent toutefois prouver que cet angle est égal à $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{6}'$ environ ¹⁾. Si la valeur angulaire du diamètre de ce cercle de diffusion reste inférieure à cette quantité, que nous représenterons par ε , la vision sera encore distincte. On observe donc encore nettement des portions de l'espace objet situées de part et d'autre du plan de visée.

Afin de déterminer cette partie de l'espace objet, c. à. d. la profondeur du champ, nous allons calculer le diamètre du cercle de diffusion pour un point L situé à une distance b du plan de visée. Soit ζ_1 la distance du plan de visée à la pupille d'entrée, et d le diamètre de cette pupille. Remarquons en premier lieu que le cercle de diffusion doit être l'image nette dans le plan de l'image d'un élément conjugué du plan de visée. Cet élément peut être trouvé directement. Le cercle de diffusion est l'intersection du plan de l'image avec le faisceau conique émergent. Du faisceau incident correspondant L est le sommet et la pupille d'entrée la directrice. Des plans conjugués, comme le plan de l'image et le plan de visée coupent ces cônes suivant des éléments correspondants. Le cercle de diffusion dans le plan de l'image est donc conjugué du cercle suivant lequel le plan de visée coupe le faisceau émanant de L . Le diamètre de ce cercle, dans le plan de visée est $\frac{bd}{\zeta_1 + b}$. Si V est le grossissement linéaire dans le

plan de l'image, le diamètre du cercle de diffusion est $\frac{bd}{\zeta_1 + b} V$.

Soit ζ_2 la distance du plan de l'image à la pupille de sortie, où l'on suppose que l'œil soit placé; le diamètre du cercle de diffusion

s'observe sous un angle $\frac{bd}{\zeta_1 + b} \frac{V}{\zeta_2}$. Il suit de là que la plus

grande distance au plan de visée des points, encore nettement observables, placés en avant de ce plan, est déterminée par

$\frac{bd}{\zeta_1 + b} \frac{V}{\zeta_2} = \varepsilon$, soit $b = \frac{\varepsilon \zeta_1 \zeta_2}{dV - \varepsilon \zeta_2}$. La distance correspondante

pour des points placés en arrière du plan de visée s'obtient en remplaçant $\zeta_1 + b$ par $\zeta_1 - b$. Représentons cette distance là par

b' , on a: $b' = \frac{\varepsilon \zeta_1 \zeta_2}{dV + \varepsilon \zeta_2}$.

Comme ζ_2 est la distance à laquelle l'œil vise, $\varepsilon \zeta_2$ est la distance de deux points que l'œil peut encore distinguer. En général cette distance sera très petite par rapport à dV , c. à. d. au pro-

¹⁾ Pulfrich, *Physikalische Zeitschrift* I, p. 98. Voir aussi Mascart, *Traité d'optique*, I, p. 130.

duit du diamètre de la pupille d'entrée du système optique et du grossissement linéaire. On a donc d'une façon très approchée

$$b = b' = \frac{\varepsilon \zeta_1 \zeta_2}{d V}, \text{ de sorte que la profondeur du champ est}$$

$$2b = \frac{2\varepsilon \zeta_1 \zeta_2}{d V}. \text{ Cette expression peut être encore tant soit peu mo-}$$

difiée. Soit α l'angle sous lequel on voit la pupille d'entrée du plan de visée; c'est donc l'ouverture des faisceaux incidents, et $d = \zeta_1 \alpha$, puisque pour des rayons centraux tous les angles sont

$$\text{très petits. La profondeur du champ devient ainsi } 2b = \frac{2\varepsilon \zeta_2}{\alpha V}.$$

Cette expression est parfois appelée profondeur focale ou profondeur de visée. Si l'image formée par le système optique n'est pas recueillie sur un écran, mais est observée à l'oeil nu, la profondeur du champ est encore augmentée par la faculté d'accommodation de l'oeil. Par suite de cette accommodation, il n'est pas seulement possible d'observer nettement ce qui est reproduit dans le plan de l'image, mais encore tout ce qui est placé de part et d'autre de ce plan entre certaines limites. Cette partie là encore de l'espace image est conjuguée d'une portion de l'espace objet. La profondeur totale du champ est la somme des profondeurs focale et d'accommodation, en les supposant toutes les deux petites. La profondeur d'accommodation peut être déterminée de la façon suivante.

Pour caractériser la faculté d'accommodation de l'oeil on distingue un „punctum remotum” et un „punctum proximum”. Le premier point est conjugué de la rétine par rapport au système optique formé par l'oeil en repos, c. à. d. en l'absence de toute accommodation. Le deuxième point est conjugué de la rétine pour un oeil au maximum d'accommodation, Représentons par

$$R \text{ et } P \text{ les distances de ces deux points à l'oeil, } A = \frac{1}{P} - \frac{1}{R}$$

est l'amplitude d'accommodation. A est ainsi exprimé en fonction du pouvoir focal d'une lentille, qui, placée devant l'oeil, produirait tout l'effet optique qu'il soit possible d'obtenir à l'aide de l'accommodation.

$$\text{On a donc } A = \frac{R - P}{R P}. \text{ Pour déterminer la profondeur}$$

d'accommodation il faut maintenant chercher quelle distance dans l'espace objet est conjuguée de $R - P$ dans l'espace image. Or cette distance est $(R - P) : V_{ax}$; ou bien encore, comme

$$V_{ax} = - \frac{V_1 V_2}{n_{a.1}} \text{ (§ 10), où } V_1 \text{ et } V_2 \text{ sont les grossissements}$$

linéaires dans les plans de l'espace image, menés aux distances P et R normalement à l'axe du système optique,

$$(R - P): - \frac{V_1 V_2}{n_{a,1}} = - A P R \frac{n_{a,1}}{V_1 V_2}. \quad \text{Le signe négatif veut}$$

dire que les points correspondants des espaces objet et image se succèdent dans le même ordre (§ 10). L'expression ainsi obtenue donne la largeur de la zone que la faculté d'accommodation ajoute à la profondeur focale, partie d'un côté, partie de l'autre du foyer. Nous modifierons encore quelque peu l'expression. Nous avons représenté par ζ_2 la distance pour laquelle l'oeil est adapté, ζ_2 sera donc une moyenne entre R et P . On pourra donc écrire à un degré suffisant d'exactitude $PR = \zeta_2^2$. Pour la même raison on peut remplacer $V_1 V_2$ par V^2 , V étant le grossissement dans le plan de l'image que l'oeil, s'accommodant pour la distance ζ_2 , observe nettement. Nous obtenons ainsi pour profondeur d'accommodation $2 A n_{a,1} \frac{\zeta_2^2}{V^2}$, et pour profondeur totale $\frac{2\varepsilon \zeta_2}{\alpha V} + 2 A n_{a,1} \frac{\zeta_2^2}{V^2}$.

Comme $\frac{I}{\zeta_2}$ est l'angle sous lequel on voit l'unité de longueur de

de l'objet, $\frac{V}{\zeta_2} = V$, et l'on peut écrire l'expression de la profon-

deur totale sous la forme $\frac{2\varepsilon}{\alpha V} + 2 A n_{a,1} \frac{1}{V^2}$.

Évaluons maintenant la profondeur focale dans un couple de cas; d'abord pour des observations à l'oeil nu ¹⁾. Dans ce cas la pupille de l'oeil est la pupille d'entrée, et le plan de l'image coïncide avec le plan de visée. L'oeil, que nous supposons placé à une distance ζ_2 du plan de l'image, est maintenant placé à la même distance du plan de visée. Des points placés de part et d'autre du plan de visée s'observent encore nettement si la section du faisceau incident, déterminé dans ce cas par la pupille de l'oeil, coupe le plan de visée suivant un cercle, dont le diamètre est plus petit que $\varepsilon \zeta_2$. On pourra donc appliquer l'expression trouvée, si l'on pose $V = 1$. La profondeur de part et d'autre du plan de visée

est $b = \frac{\varepsilon \zeta_1 \zeta_2}{d + \varepsilon \zeta_2}$; d est maintenant le diamètre de la pupille de

l'oeil. Cette expression peut d'ailleurs être déduite directement de la manière indiquée précédemment. Supposons $\varepsilon = 1'$, et que l'oeil vise à une distance de 350 mm., et soit $d = 4$ mm.; alors

¹⁾ Voir Czapski, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1892, Bd. VII, p. 185.

$b = \frac{350 \times 0,000291 \times 350}{4 \mp 0,000291 \times 350} = \begin{cases} 9.1 \text{ mm.} \\ 8.7 \text{ ..} \end{cases}$ de sorte que la profondeur focale est 17,8 mM.

Comme deuxième cas nous considérons celui où l'on se sert d'un oculaire à grossissement V pour examiner l'image formée par le système optique. Nous avons trouvé plus haut pour profondeur focale $\frac{2\varepsilon\xi_2}{\alpha V}$. Soient $V = 5$, $\xi_2 = 350$ mM. L'ouverture des cônes

lumineux sortant de l'oculaire est $\frac{4}{350}$, s'ils remplissent toute la

pupille de l'œil; celle des cônes incidents $\frac{4}{350} \times 5$, puisque le

grossissement angulaire est l'inverse du grossissement linéaire, dans le cas où les milieux extrêmes de l'oculaire sont identiques. On a

$$\text{ainsi } \frac{2\varepsilon\xi_2}{\alpha V} = \frac{2 \times 0,000291 \times 350}{\frac{4}{350} \times 5 \times 5} = 0.7 \text{ mm.}$$

Si les faisceaux qui

sortent de l'oculaire ne remplissent pas complètement l'œil, la valeur de α est plus petite et la profondeur est plus grande.

Si le plan de visée est placé à une distance infiniment grande, $\alpha = 0$ et $V = 0$, de sorte que la profondeur focale est infiniment grande. Cela veut dire que la région nettement observée de l'espace objet s'étend jusqu'à une distance finie du système optique. Nous obtenons une détermination plus exacte de cette région en cherchant le point lumineux pour lequel le cercle de diffusion est égal à $\varepsilon\xi_2$. Ici encore la portion nettement observée de l'espace objet se compose de deux portions, situées de part et d'autre du plan de visée. Laissons le point lumineux se déplacer du plan de visée vers la pupille d'entrée, tout en restant devant le système optique. Comme le plan de visée est situé à l'infini, le plan de l'image passe par le deuxième foyer principal. La pupille de sortie doit donc être située en arrière de ce plan, pour que l'œil de l'observateur y puisse être placé. La pupille d'entrée est donc située en avant du premier foyer principal. Soient ξ_1 et ξ_1' les distances du point lumineux et de la pupille d'entrée au premier foyer principal, ξ_2 et ξ_2' les distances du plan de l'image et de la pupille de sortie au deuxième foyer principal. Dans le cas considéré $\xi_1 > \xi_1'$ et $\xi_2 < \xi_2'$. Les rayons émis par le point lumineux forment après réfraction un cône ayant pour sommet l'image correspondante, et la pupille de sortie comme directrice. Ce cône coupe le plan de l'image, conjugué du plan de visée, suivant un

cercle dont le diamètre est égal à $dV \frac{\xi_2}{\xi_2' - \xi_2}$. L'image du point lumineux est encore nette, si $dV \frac{\xi_2}{\xi_2' - \xi_2} \leq \varepsilon \xi_2$. Comme $\xi_1 \xi_2 = \xi_1' \xi_2'$ on a $\frac{\xi_2}{\xi_2' - \xi_2} = \frac{\xi_1'}{\xi_1 - \xi_1'}$.

De plus V est le grossissement dans le plan de la pupille de sortie, donc $V = \frac{n_{a,1}}{p \xi_1'}$. De sorte que pour $n_{a,1} = 1$, la condition trouvée devient $\xi_1 > \xi_1' + \frac{d}{\varepsilon p \xi_2}$. La partie de l'espace objet, placée devant le plan de visée, et encore nettement observée, s'étend donc jusqu'à une distance $\frac{d}{\varepsilon p \xi_2}$ de la pupille d'entrée.

Si le point lumineux se déplace vers l'autre côté du plan de visée, cela veut dire qu'il devient virtuel, et que les rayons incidents deviennent convergents. Le point lumineux virtuel se déplace ainsi d'un plan à l'infini en arrière du système vers la pupille d'entrée. Dans ce cas $\xi_1 < \xi_1'$ et $\xi_2 < 0$ de sorte que le diamètre du cercle de diffusion est égal, en valeur absolue, à $dV \frac{\xi_2}{-\xi_2' + \xi_2} = \frac{d}{p} \frac{1}{\xi_1' - \xi_1}$.

Dans ce cas la condition cherchée est donc $\frac{d}{p} \frac{1}{\xi_1' - \xi_1} \leq \varepsilon \xi_2$, ou bien $\xi_1 \leq \xi_1' - \frac{d}{\varepsilon p \xi_2}$. Elle exprime que la portion nettement observée de l'espace objet, située derrière le plan de visée, s'étend depuis l'infini jusqu'à une distance $\frac{d}{\varepsilon p \xi_2}$ de la pupille d'entrée.

Les expressions trouvées pour les profondeurs focale et d'accommodation nous apprennent que, si la valeur de α reste constante, c. à. d. l'angle sous lequel on voit la pupille d'entrée d'un point du plan de visée, la profondeur focale diminue proportionnellement à la puissance, donc aussi au grossissement, tandis que la profondeur d'accommodation diminue proportionnellement aux carrés de ces grandeurs. Dans les cas où le grossissement est considérable la faculté d'accommodation contribuera donc peu à la profondeur du champ. C'est ce qu'on reconnaît d'ailleurs plus clairement encore, si l'on calcule le rapport de la profondeur de l'espace objet à la largeur observée. Si du centre de la pupille de sortie on observe sous l'angle β le rayon du champ visuel dans l'espace de l'image, le diamètre de ce champ est $2 \beta \xi_2$, et la dimension conjuguée

dans l'espace de l'objet est $\frac{2\beta\zeta_2}{V} = \frac{2\beta}{V}$. Le rapport de la profondeur à la largeur de l'espace objet accessible à l'observation, est égal, si l'on considère la profondeur focale, à $\frac{2\varepsilon}{\alpha V} : \frac{2\beta}{V} = \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}$ c. à d. constante pour des valeurs données de α et β . Si l'on considère la profondeur d'accommodation, ce rapport est égal à $2 A n_{a,1} \frac{1}{V^2} : \frac{2\beta}{V} = \frac{A n_{a,1}}{\beta} \frac{1}{V}$, c. à d. dans la même hypothèse que pour la profondeur focale, inversement proportionnelle à la puissance, donc aussi au grossissement. Pour de petites valeurs de V , l'expression $\frac{A n_{a,1}}{\beta} \frac{1}{V}$ sera bien plus grande que $\frac{\varepsilon}{\alpha\beta}$, mais si V est considérable, la faculté d'accommodation contribuera encore à peine à la profondeur, qui sera presque entièrement déterminée par la valeur constante de la profondeur focale. A cause de la forte diminution de la profondeur, tout système optique dont on augmente le grossissement, se rapproche d'un „microtome optique” ¹⁾, qui ne permet de voir que des sections planes de l'objet. Avec un système optique quelconque il est possible d'obtenir des effets stéréoscopiques, si l'on a soin de recevoir dans chaque oeil les rayons situés d'un côté seulement d'un plan mené par l'axe du faisceau lumineux. C'est ce qu'on réalise dans un microscope binoculaire, et dans le microscope à oculaire stéréoscopique d'ABBE. D'après ce que l'on vient de voir ces effets stéréoscopiques ne sont de quelque importance que si le grossissement est faible ²⁾.

§ 21. *Influence de la position des pupilles sur les mesures faites à l'aide d'images optiques.* Dans divers cas on se sert d'instruments d'optique pour déduire des dimensions de l'image les dimensions apparentes ou linéaires de l'objet: c'est ce que l'on fait par exemple dans les microscopes micrométriques et les lunettes munies

¹⁾ ABBE, Beschreibung eines neuen stereoscopischen Oculars nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bedingungen mikroskopischer Beobachtung, Carl's Repert. f. Exp. Physik, Bd. XVII, 1881, p. 224. Verdet, Conférences de physique, T. II, p. 947.

²⁾ Voir ABBE, loc. cit.. Voir aussi Zeitschr. für Mikroskopie, II, 1880, p. 207, et Journal Royal Microscopical Society, Ser. II, Vol. 1, 1881, p. 203. Voir encore BOSSCHA, Les équations des nouvelles copies du Mètre des Archives, Arch. Néerl., T. XXV, p. 198 et suiv.

Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1^{re} Sectie) Dl. VII.

d'un micromètre à fils. Pour ces mesures il est nécessaire de connaître le facteur de réduction, c. à. d. le rapport des dimensions correspondantes de l'objet et de l'image; or ce rapport peut être déduit des propriétés du système optique. Ce facteur de réduction peut donc varier par un changement dans les constantes optiques du système, changements qui peuvent provenir par exemple d'une variation de température. Un autre changement possible du facteur de réduction a été signalé par ABBE; ce changement dépend à un haut degré de la délimitation du faisceau reproducteur, c. à. d. de la position des pupilles ¹⁾.

Pour le bien faire voir, nous remarquerons que malgré tout le soin que nous mettons à faire coïncider le plan dans lequel s'effectuent les mesures avec le plan de l'image, la coïncidence absolue n'est en général pas atteinte. D'ailleurs, en supposant même que cette coïncidence ait été momentanément obtenue, des changements dans les situations relatives de l'objet et du système optique, des influences de température ou des variations dans l'accommodation de l'oeil, pourront la rendre de nouveau imparfaite. Donnons au plan, sur lequel l'oculaire du microscope micrométrique est pointé, le nom de plan de mesure. En général ce plan est déterminé par des fils d'araignée ou d'une autre façon; et si tel n'est pas le cas il a néanmoins une position déterminée par la distance, pour laquelle l'oeil s'est accommodé. Le plan de l'image ne coïncide donc pas d'ordinaire avec le plan de mesure; ce qui n'empêche pas pourtant que l'image imparfaitement nette, produite dans le plan de mesure, puisse être observée comme une image nette par suite de la profondeur du champ. Nous avons vu que tel est le cas si le cercle de diffusion n'excède pas certaines limites. Les centres des cercles de diffusion, c. à. d. des sections des faisceaux émergents par le plan de mesure, sont situés sur les rayons principaux de ces faisceaux, lesquels rayons passent par le centre de la pupille de sortie. L'image que l'on mesure est produite par ces cercles de diffusion, et l'on peut admettre que l'on vise les centres de ces cercles. Il résulte déjà de là, que la direction des rayons principaux, menés par les centres des pupilles, doit avoir une grande influence sur les dimensions de l'image que l'on mesure.

Considérons deux points dans l'objet et soient D_1 et D'_1 les divergences des rayons principaux venant de ces points, donc pas-

¹⁾ ABBE, Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzungsber. Jenaischer Gesellschaft, 1878.

sant par le centre de la pupille d'entrée; nous représenterons par D_r et D_r' les divergences des rayons réfractés correspondants, passant par le centre de la pupille de sortie. Soient encore ζ_1 la distance de l'objet à la pupille d'entrée, ζ_2 celle de l'image à la pupille de sortie; la distance des deux points considérés dans l'objet est donc $y_1 - y_1' = (D_1 - D_1') \zeta_1$, et celle des points correspondants dans l'image: $y_2 - y_2' = (D_2 - D_2') \zeta_2$. Il résulte de là que le facteur de réduction est $\frac{y_1 - y_1'}{y_2 - y_2'} = \frac{D_1 - D_1'}{D_2 - D_2'} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{1}{V_a} \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$,

si V_a est le grossissement angulaire dans le plan de la pupille de sortie. On voit clairement d'après cette relation quelle est l'influence de ζ_1 et ζ_2 sur le rapport entre les dimensions de l'image et de l'objet.

ABBE a fait voir que l'on peut rendre ce facteur de réduction indépendant aussi bien de ζ_1 que de ζ_2 . Supposons que ζ_2 soit constant. Tel est le cas pour l'objectif d'un microscope micrométrique. Pour faire des mesures à l'aide de ce microscope, dès qu'il a été pointé, on ne change plus rien à la position, par rapport à l'objectif, du plan de mesure déterminé par les fils du réticule. En général le bord de la première lentille d'un microscope sert de pupille d'entrée, la position de la pupille de sortie par rapport à l'objectif reste donc invariable. De petits déplacements de l'oculaire, effectués pour corriger de petites variations dans la distance pour laquelle l'oeil s'accommode, ne modifient évidemment en rien la position du plan de mesure. ζ_2 est donc constant. Si l'on néglige l'influence de la température sur les constantes optiques du microscope, le facteur de réduction ne peut être modifié que par un changement dans la distance de l'objet au microscope. Ces variations dans le facteur de réduction disparaissent du moment que les rayons principaux incidents sont parallèles à l'axe optique du système. Quelle que soit alors la position de l'objet, deux mêmes rayons principaux incidents coupent l'objet toujours aux deux mêmes points, et en font de même à l'égard du plan de mesure. Les centres des cercles de diffusion, correspondant à deux points de l'objet, conservent donc toujours la même distance, indépendamment de la position de l'objet; de sorte que le facteur de réduction est constant. Cette marche des rayons lumineux est nommée par Abbe télécentrique du côté de l'objet. On l'obtient en plaçant un diaphragme au deuxième foyer principal du système, donc dans le cas de mesures faites à l'aide du microscope micrométrique, au deuxième foyer principal de l'objectif. On pourrait d'ailleurs placer le diaphragme en un point conjugué de ce deuxième foyer principal par rapport au système de lentilles, situé entre ce point et le dia-

phragme lui-même. De cette façon la pupille d'entrée est placée à l'infini, de sorte que $\xi_1 = \infty$ ¹⁾.

Le facteur de réduction est indépendant de ξ_2 , c. à. d. de la position du plan de mesure, si les rayons principaux émergents sont parallèles à l'axe du système optique. Suivant la dénomination employée par ABBÉ, cette marche des rayons est télécentrique du côté de l'image. Dans ce cas des changements dans la position de l'oculaire ou des modifications dans le tirage dûs à des variations de température n'ont aucune influence sur le facteur de réduction.

Il est d'ailleurs possible de rendre la marche des rayons télécentrique du côté de l'image aussi bien que du côté de l'objet, comme cela peut être le cas dans les objectifs des microscopes micrométriques. Il faut alors que l'objectif soit un système télescopique, et que le diaphragme soit placé au point qui est respectivement deuxième et premier foyer principal du premier et du deuxième système de lentilles dont le système télescopique est composé.

Dans ces trois cas la valeur du facteur de réduction s'obtient directement.

a) *La marche des rayons principaux est télécentrique du côté de l'objet.* Considérons le rayon principal incident d'un point lumineux à la distance a de l'axe. La divergence du rayon principal émergent correspondant est $p.a$, d'après la signification de la constante optique p (§ 3). Ce rayon principal passe par le deuxième foyer principal, et coupe le plan de mesure en un point situé à la distance $p.a.\xi_2$ de l'axe. Comme la pupille de sortie est placée au deuxième foyer principal, ξ_2 est la distance du plan de mesure au deuxième foyer principal, distance que nous avons représentée précédemment par ξ_2 . Le facteur de réduction est donc $\frac{1}{p\xi_2}$. On peut du reste

partir de l'expression $\frac{1}{V_a} \frac{\xi_1}{\xi_2}$, trouvée pour le facteur de réduction dans le cas général, et y poser $\xi_2 = \xi_2$. ξ_1 est la distance du point lumineux au centre de la pupille d'entrée; cette distance est infiniment grande. On a d'ailleurs $\frac{\xi_1}{V_a} = \frac{\xi_1}{c + px_1}$, où x_1 se rapporte au centre de pupille d'entrée, de sorte que pour $x_1 = \infty$, $\frac{\xi_1}{V_a}$ prend la valeur $\frac{1}{p}$.

¹⁾ On peut encore faire remarquer que par la marche télécentrique des rayons du côté de l'objet, les dimensions linéaires du champ visuel deviennent égales à celles de la pupille d'entrée.

b) *La marche des rayons principaux est télécentrique du côté de l'image.* La divergence d'un rayon incident principal venant d'un point lumineux à la distance a de l'axe est $\frac{a}{\xi_1}$. D'après les valeurs des constantes optiques du système inverse (équ. III. § 5), un rayon incident passant par le premier foyer principal et de divergence $\frac{a}{\xi_1}$, a une amplitude finale de $\frac{a}{\xi_1} \frac{n_{a,1}}{p}$, de sorte que le facteur de réduction est $\frac{\xi_1 p}{n_{a,1}}$. On y arrive aussi en partant de l'expression générale $\frac{1}{V_a} \frac{\xi_1}{\xi_2}$, où $\xi_2 = \infty$, $\xi_1 = \xi_1$, $V_a = \frac{n_{a,1}}{p \xi_2}$. Or comme $x_2 = \infty$, il suit que $\frac{1}{V_a \xi_2} = \frac{p}{n_{a,1}}$.

c) *Marche des rayons principaux télécentrique du côté de l'image et de l'objet.* Comme un système télescopique présente un grossissement constant s , s est aussi le facteur de réduction (§ 15).

Il faut remarquer que les avantages présentés par une marche télécentrique des rayons ne s'obtiennent qu'aux dépens de l'intensité lumineuse. L'ouverture des faisceaux coniques émis par les divers points lumineux est considérablement réduite par l'ouverture du diaphragme. Or cette ouverture ne peut pas être trop grande, sans quoi les cercles de diffusion dans le plan de mesure seraient trop grands, ce qui nuirait à la netteté de l'image et rendrait ainsi les mesures micrométriques impossibles. A mesure que les plans de mesure et de l'image s'écartent davantage, il faut, toutes conditions égales d'ailleurs, diminuer l'ouverture du diaphragme.

§ 22. *Perspective de l'image optique.* Au § 20 nous avons fait voir que la profondeur du champ ne dépend que de l'ouverture des faisceaux lumineux et du grossissement du système optique. Elle est d'autant plus grande que l'ouverture et le grossissement sont plus faibles et peut donc prendre des valeurs considérables dans les objectifs photographiques, où l'ouverture des faisceaux lumineux est faible et où le grossissement est généralement inférieur à 1. Comme l'image produite par le système optique, pour autant qu'elle soit nettement observée, est une reproduction non seulement du plan de visée, mais encore de plans, situés à peu de distance de part et d'autre du plan de visée, on est tout naturellement conduit à la question de savoir de quel point un observateur doit considérer l'image pour recevoir la même impression que par l'observation de l'objet. La

portion de l'objet encore nettement observée par le système optique, est la projection centrale de l'espace objet sur le plan de visée du centre de la pupille d'entrée. L'image est semblable à cette reproduction en perspective. Le facteur de similitude est le grossissement du système optique. On recevra donc l'impression voulue de perspective, en plaçant l'œil à une distance telle de l'image que les dimensions de l'image soient observées sous le même angle que les dimensions correspondantes de l'objet vu du centre de la pupille d'entrée. Dans cette observation l'œil ne doit pas être placé au centre de la pupille de sortie, puisque l'image et l'objet seraient alors vus de points correspondants, donc sous des angles dont le rapport serait égal à V_a , V_a étant le grossissement angulaire dans le plan de la pupille de sortie.

Du centre de la pupille de sortie, donc à une distance ξ_2 de l'image, on voit donc les dimensions de l'image sous un angle V_a fois plus grand que celui sous lequel sont observées les dimensions correspondantes de l'objet. Il en résulte immédiatement que la distance cherchée doit être égale à $V_a \xi_2$, ou bien $V_a (\xi_2' - \xi_2)$, si ξ_2' et ξ_2 sont les distances de la pupille de sortie et de l'image au deuxième foyer principal.

Si le système optique est une lentille infiniment mince, et s'il n'y a pas de diaphragmes particuliers, de sorte que les bords de la lentille délimitent les faisceaux incidents, ou bien encore si le diaphragme est placé immédiatement en avant de la lentille, les pupilles coïncident avec le plan de celle-ci. Comme dans ce cas $V_a = c$ (§ 3); et pour une lentille infiniment mince $c = 1$, la distance à laquelle il faut observer l'image est donc ξ_2 , c. à. d. la distance de l'image à la lentille. La pupille de sortie est en effet placée dans le plan de la lentille elle-même.

Si l'objet est infiniment éloigné, on a $\xi_2 = \xi_2'$, $V_a = \frac{n_{a1}}{p \xi_2}$, (§ 10), et la distance cherchée est $\frac{n_{a1}}{p}$, soit $\frac{1}{p}$ pour $n_{a1} = 1$. Pour

une lentille infiniment mince, $\frac{1}{p}$ est la valeur absolue de la distance focale principale. Dans ce cas le point de vue est à une distance de l'image égale à la distance focale principale. Cette règle trouve une application étendue en photographie.

Si la distance cherchée est inférieure à celle pour laquelle l'œil peut s'accommoder, l'observation de l'image doit se faire à l'aide d'une lentille convergente. Si l'on regarde l'image à une distance trop faible, donc sous un angle trop grand, l'image

paraît plus plate que l'objet; c'est là une propriété générale en perspective; si au contraire la distance à laquelle on observe l'image est trop grande, l'image semble avoir plus de profondeur que l'objet.

III. Constantes optiques de l'oeil et conditions d'achromatisme.

§ 23. *Constantes optiques de l'oeil emmétrope.* A l'aide des indices de réfraction, rayons de courbure et épaisseurs des milieux qui constituent le système optique de l'oeil, on peut calculer les constantes optiques de l'oeil, considéré comme un système de surfaces sphériques centrées. M. BOSSCHA ¹⁾ a effectué ces calculs, en se servant des valeurs de „l'oeil réduit” de LISTING, dont les éléments géométriques et optiques sont les moyennes des observations connues jusque vers 1850. HELMHOLTZ ²⁾ a donné des valeurs moyennes déduites de plusieurs mesures ophthalmométriques faites jusque dans les derniers temps. Ces valeurs moyennes sont :

$$n_{\text{Humeur aqueuse}} = n_{\text{Humeur vitrée}} = 1,3365, \quad n_{\text{cristallin}} = 1,4371$$

$$R_{\text{cornée}} = 7,829 \text{ mM}, \quad R_{\text{crist. face ant.}} = 10 \text{ mM}, \quad R_{\text{crist. face post.}} = 6 \text{ mM}.$$

Distance du centre de la cornée à la face antérieure du cristallin = 3,6 mM.; épaisseur du cristallin = 3,6 mM. Vu la faible épaisseur de la cornée, nous pouvons négliger la faible différence entre les indices de réfraction de la cornée ($n_{\text{cornée}} = 1,340$) et de l'humeur aqueuse: de sorte que nous trouvons pour constantes optiques du système formé par la cornée et l'humeur aqueuse (§ 4): $c = 0,7482$, $p = -0,03216$, $r = 0$, $s = 1$.

Les indices de réfraction de l'humeur aqueuse et de l'humeur vitrée étant égaux, l'indice du cristallin par rapport au milieu qui l'entoure, est $\frac{1,4371}{1,3365} = 1,0753$. Les constantes optiques du cristallin, dont l'indice relatif au milieu environnant est 1,0753, sont (§ 12) $c = 0,9580$, $p = -0,01976$, $r = 3,348$, $s = 0,9748$.

Pour le système optique formée par la cornée et le cristallin nous trouvons, à l'aide des relations II (§ 4), et tenant compte de $d = 3,6 \text{ mM.}$:

¹⁾ BOSSCHA, *loc. cit.*, p. 99 et suiv.

²⁾ HELMHOLTZ, *Physiol. Optik*, 2^e Aufl., p. 140.

$$\begin{array}{cccc}
 c = 0.6635 & p = -0.04828 & r = 5.1306 & s = 0.7543 \\
 (0.639) & (-0.0498) & (5.644) & (0.739)
 \end{array}$$

Les nombres placés entre parenthèses sont ceux calculés par M. BOSSCHA, au moyen des données de „l'oeil réduit” de LISTING.

Nous avons déjà supposé que les rayons sortant du cristallin entrent dans l'humeur vitrée dont l'indice de réfraction est 1,3365. Or l'on se propose surtout de chercher le point où les faisceaux lumineux frappent la rétine. Nous allons donc encore ajouter au système la région de l'humeur vitrée comprise entre la cornée et la face postérieure du cristallin. Soit d son épaisseur, c. à d. la distance de la face postérieure du cristallin à la rétine. Dans l'humeur vitrée il n'y a plus de nouvelle réfraction. Seule l'amplitude varie de $d.D_r$; et la deuxième équation fondamentale devient $A_r = rD_1 + sA_1 + dD_r$. Il en résulte en substituant $D_r = cD_1 + pA_1$; $A_r = (r + dc)D_1 + (s + dp)A_1$. On voit donc que r devient $r + dc$, s devient $s + dp$. Des données de Helmholtz il résulte que le deuxième foyer principal de l'oeil est placé à une distance de 15,619 mM. en arrière du cristallin. Posant donc $d = 15,619$ on trouve :

$$\begin{array}{cccc}
 c = 0.6635 & p = -0.04828 & r = 15.494 & s = 0.0002 \\
 (0.639) & (-0.0498) & (15.00) & (0.00)
 \end{array}$$

Les nombres placés entre parenthèses sont encore une fois ceux calculés par M. BOSSCHA au moyen des données de „l'oeil réduit” de LISTING; pour lequel le deuxième foyer principal est placé à 14,65 mM. en arrière du cristallin.

Un faisceau de rayons incidents parallèles à l'axe coupe le deuxième foyer principal au point d'intersection avec l'axe, de sorte que $A_r = 0$.

Comme pour $D_1 = 0$, $s = \frac{A_r}{A_1}$, les calculs doivent donc donner $s = 0$. La faible différence $s = 0,0002$ doit provenir d'une petite erreur dans le calcul ou dans la valeur de la deuxième distance focale principale. La condition $s = 0$ nous apprend que le deuxième foyer principal est placé dans le plan de la dernière surface du système optique, c. à d. que l'oeil pour lequel la distance du cristallin à la rétine est de 15,619 mM. est emmétrope. Pour un tel oeil les deux équations fondamentales sont $D_r = cD_1 + pA_1$, $A_r = rD_1$ M. BOSSCHA ¹⁾ a fait remarquer que les perceptions

¹⁾ BOSSCHA, *loc. cit.* p. 100.

visuelles sont indépendantes de la direction des rayons qui rencontrent la rétine en un même point. L'oeil emmétrope est donc suffisamment caractérisé par une seule constante optique. La deuxième équation fondamentale conserve la même forme pour tout système que l'on prolonge dans le dernier milieu jusqu'au deuxième foyer principal, c. à d. si l'on mène la surface terminale par ce point.

De $A_r = rD_1$ il résulte que l'amplitude finale ne dépend que de la divergence du rayon incident. Si un point lumineux est placé à une distance quelconque en avant de l'oeil, les rayons émis par ce point qui entrent dans l'oeil, coupent la rétine suivant le cercle de diffusion. Le centre de ce cercle est placé sur le rayon principal réfracté. Le rayon principal incident passe par le centre de la pupille d'entrée, dont l'image, formée par la cornée et l'humeur aqueuse, coïncide avec la pupille de l'oeil. Les distances des centres des cercles de diffusion ne dépendent que des différences de divergence des rayons incidents principaux et sont r fois plus grandes. Ces distances sont indépendantes de celles auxquelles les points lumineux sont placés en avant de l'oeil. Par leur ensemble ces cercles de diffusion forment l'image rétinienne diffuse. Si les points lumineux sont à l'infini, les cercles de diffusion se réduisent à leurs centres, et forment une image parfaitement nette. La grandeur des images rétiniennes est donc proportionnelle à la différence des rayons principaux incidents. Pour des points lumineux à une distance infinie de l'oeil chaque rayon du faisceau incident peut être considéré comme principal, puisqu'ils sont tous parallèles.

De $A_r = rD_i$ il résulte, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que le diamètre du cercle de diffusion est r fois plus grand que l'ouverture du faisceau incident. Cette ouverture est l'angle au sommet du faisceau conique incident. Soient A la distance du point lumineux à l'oeil et ρ le rayon de la pupille d'entrée, alors on a pour le rayon du cercle de diffusion $r \frac{\rho}{A}$. Cette valeur de ρ peut être aisément déterminée à l'aide des constantes précédemment données du système optique composé de la cornée et l'humeur aqueuse. Pour ce système on a $F_1 = 23,265$, $F_2 = 31.095$ et $\xi_1 \xi_2 = \frac{n_{a1}}{p^2} = 723.41$. Si maintenant on admet que la pupille de l'oeil soit appliquée contre le cristallin, on a $\xi_2 = -(31.095 - 3.6) = -27.495$, et $\xi_1 = -26.311$. Le centre de la pupille d'entrée est donc placé à $26.311 - 23.265 = 3.046$ mM. en arrière de la cor-

née, soit à 0.554 mM. en avant de la pupille de l'oeil. Le grossissement dans le plan de cette pupille est $\xi_2 = 0,8842$, ce qui veut dire que le diamètre de la pupille de l'oeil est 0,8842 fois plus grand ou 1,131 fois plus petit que celui de la pupille d'entrée. Si le diamètre de la pupille de l'oeil est 4 mM., on a $\rho = 2.262$ mM. ¹⁾

Quand on regarde un objet, l'oeil est placé de telle façon que l'image rétinienne se forme sur la tache jaune. Soit A_e la distance du milieu de cette tache au point où l'axe coupe la rétine.

$D_1 = \frac{A_e}{r}$ est l'angle constant que font entre eux l'axe de l'oeil et la direction dans laquelle se trouve l'objet, par rapport au centre de la pupille d'entrée. La ligne menée par ce point et l'objet est la ligne de visée.

Comme $F_1 = -\frac{c}{p}$, la première distance focale principale de l'oeil est $F_1 = \frac{0.6635}{0.04828} = 13.74$. La position de l'image peut être

déterminée au moyen de l'expression $\xi_2 = \frac{n_{a,1}}{\xi_1 p^2}$ (équ. VII, § 9), où

$n_{a,1} = \frac{1}{1.3365}$ et $p = -0,04828$, de sorte que $\xi_2 = \frac{311.5}{x_1 - 13.74}$.

ξ_2 est la distance de l'image au deuxième foyer principal qui, pour un oeil emmétrope, est placé dans la rétine; x_1 est la distance

de l'objet à l'oeil. Les valeurs de LISTING donnent $\xi_2 = \frac{301}{x_1 - 12.8}$.

L'exactitude de la valeur calculée pour r peut être contrôlée de la façon suivante. Jusque dans ces derniers temps on admettait généralement que les images de deux points voisins peuvent se distinguer l'une de l'autre si leur distance est au moins de 60". La distance des images rétiniennes de ces points comporte $A_r = r D_1$, et comme $r = 15,494$ et que la longueur d'un arc de 60" en fonction du rayon est égal à 1 : 3438, il vient $A_r = 0,0045$ mM. Des mesures ont donné pour l'épaisseur des cônes dans la tache jaune 0,003 mM.; dans d'autres régions de la rétine cette épaisseur atteint 0,0045 et 0,0067 mM., tandis que l'épaisseur des bâtonnets est de 0,002 mM. Or l'oeil peut distinguer deux points lumineux si les images rétiniennes tombent sur deux éléments différents de la rétine. Si les images rétiniennes sont amenées

¹⁾ Voir HELMHOLTZ, *Physiol. Optik*, 2^e Aufl., p. 126, où la pupille d'entrée est calculée à l'aide des données fournies par LISTING.

dans la tache jaune, on devrait donc pouvoir distinguer deux points lumineux dont la distance angulaire n'est que de $45''$. Ce résultat est d'accord avec les recherches les plus récentes, qui ont appris que dans tous les cas cette valeur est inférieure à $1'$.¹⁾

A l'aide des constantes optiques de l'oeil emmétrope on peut déterminer sa profondeur focale, c. à. d. la portion de l'espace objet que l'oeil emmétrope peut nettement observer sans se servir de la faculté d'accommodation. Supposons que l'on puisse distinguer nettement encore tous les points dont le cercle de diffusion sur la rétine soit plus petit qu'un élément sensitif de la tache jaune. Le rayon du cercle peut alors tout au plus atteindre 0,0015 mM. A mesure que le point lumineux, venant de l'infini, s'approche de l'oeil, le cercle de diffusion sur la rétine augmente. Représentons par l la plus petite distance à laquelle le point lumineux puisse s'approcher sans que le rayon maximum soit dépassé. La demi-ouverture du faisceau lumineux envoyé du point vers la pupille d'entrée est $\frac{2.26}{l}$, puisque nous venons de voir que 2.26 est le rayon de la pupille d'entrée. Le rayon du cercle de diffusion est r fois plus grand, soit $r \frac{2.26}{l}$. On a donc $r \frac{2.26}{l} = 0,0015$, ou bien, comme $r = 15,494$, $l = 23,4$ M. En l'absence de toute accommodation, l'oeil voit donc nettement les objets depuis les points à une distance infinie jusqu'à ceux qui ne sont distants que de 23.4 M.

Nous donnerons enfin la grandeur et la position de la pupille de sortie. Cette pupille est située dans le deuxième point oculaire, à 0,1 mM. en arrière de la face antérieure de la lentille, et elle est 1,044 fois plus grande que la pupille de l'oeil, c. à. d. que pour un diamètre de la pupille de 4 mM., la pupille de sortie a un diamètre de 4.176 mM. Nous supposons évidemment que la pupille de l'oeil soit appliquée contre la face antérieure du cristallin.

§ 24. *Varations des constantes optiques de l'oeil par l'accommodation; oeil amétrope.* HELMHOLTZ n'a pas seulement donné les valeurs des éléments géométriques et optiques qui déterminent les propriétés optiques d'un oeil emmétrope, mais aussi les valeurs que

¹⁾ Voir PULFRICH, Physik. Zeitschr., I, p. 98. Voir aussi note 1, § 20. MASCART en adoptant la valeur donnée par Foucault pour la pénétration d'un objectif de 13 cM. de diamètre, donne pour l'acuité visuelle la valeur de $30''$. Cette limite toutefois ne serait jamais atteinte. MASCART déduit le pouvoir résolvant du diamètre apparent de la tache lumineuse formant le centre de l'image que donne un point. Traité d'optique, I, p. 130, 41.

prennent ces éléments lorsque l'oeil est accommodé pour un point aussi rapproché que possible ¹⁾, c. à. d. lorsque l'accommodation est aussi grande que possible. Par l'accommodation c'est surtout la courbure de la face antérieure du cristallin qui est modifiée; elle augmente en même temps que l'épaisseur du cristallin, tandis que la distance du cristallin à la cornée diminue. Les valeurs des rayons de courbure de la face antérieure et de la face postérieure du cristallin sont pour l'état d'accommodation maxima: respectivement 6 mM. et 5,5 mM, l'épaisseur du cristallin 4,6 mM., la distance du cristallin à la cornée 3,2 mM.

Les constantes optiques du cristallin, placé dans un milieu dont l'indice de réfraction est celui des humeurs aqueuse et vitrée, sont donc:

$$c = 0.9491, \quad p = -0.02560, \quad r = 3.720 \quad s = 0.9533.$$

Si l'on combine le cristallin avec le système non modifié cornée-humeur aqueuse, on trouve:

$$\begin{array}{cccc} c = 0.6488, & p = -0.05349 & r = 5.066 & s = 0.7356 \\ (0.6635) & (-0.04828) & (5.1306) & (0.7543). \end{array}$$

Les nombres entre parenthèses se rapportent à l'oeil emmétrope en repos, c'est-à-dire en l'absence de toute accommodation. Si l'on ajoute de nouveau l'humeur vitrée avec une épaisseur $d = 15.619$ mm. ²⁾ au système optique, on trouve:

$$\begin{array}{cccc} c = 0.6488 & p = -0.05349 & r = 15.200 & s = -0.09986 \\ (0.6635) & (-0.04828) & (15.494) & (0.0002) \end{array}$$

où les nombres entre parenthèses se rapportent encore une fois à l'oeil emmétrope à l'état de repos. Les foyers principaux sont placés respectivement à 12,13 mm. en avant de la cornée et à 13.752 mm. ³⁾ en arrière du cristallin, soit $15.619 - 13.752 = 1.867$ mm. en avant de la rétine. La distance de l'image au deuxième foyer principal s'obtient au moyen de la formule $\xi_2 = \frac{261.5}{x_1 - 12.13}$, où x_1 représente de nouveau la distance de l'objet à l'oeil. Si l'on cherche maintenant où se trouve le point conjugué du point d'intersection de l'axe avec la rétine, on trouve $x_1 = 152.21$ mM ⁴⁾.

¹⁾ HELMHOLTZ, *Physiol. Optik*, 2^e Aufl., p. 140.

²⁾ Cette distance du cristallin à la rétine ne change pas par l'accommodation.

³⁾ HELMHOLTZ, *loc. cit.*, donne pour ces valeurs 12.13 et 13.755.

⁴⁾ HELMHOLTZ, *loc. cit.*, donne 152.46.

Telle est donc la distance du point le plus rapproché, nettement observé par l'oeil au maximum d'accommodation.

Le rayon du cercle de diffusion, formé sur la rétine par un point lumineux placé en avant ou en arrière de ce „punctum proximum”, s'obtient, si le point est situé sur l'axe, en considérant un rayon passant par le bord de la pupille d'entrée. Pour ce rayon incident D_1 et A_1 sont connus. La deuxième équation fondamentale $A_r = 15.200 D_1 - 0,09986 A_1$ donne alors l'amplitude finale, soit le rayon cherché du cercle de diffusion. Si le point considéré n'est pas situé sur l'axe, la section du faisceau émergent par la rétine est néanmoins un cercle, et ce cercle est également grand pour tous les points lumineux situés dans un même plan normal à l'axe. C'est ce que l'on reconnaît immédiatement en observant que le cercle de diffusion est toujours semblable à la pupille de sortie, et que le rapport de similitude est le même pour tous les points lumineux dans un même plan normal à l'axe. On considère toujours la rétine comme un plan de cette espèce; or dans la région où la reproduction optique peut être considérée comme obtenue par des rayons centraux, cette hypothèse est suffisamment exacte.

Pour un oeil amétrope on peut avoir $s > 0$ (hypermétropie), ou $s < 0$ (myopie). Il est aisé de calculer la position du „punctum remotum” et le degré d'amétropie, connaissant les constantes optiques c , p , r , s , d'un oeil amétrope. Ce point le plus éloigné est conjugué du point d'intersection de l'axe optique avec la rétine, si l'oeil est en repos. C'est donc le premier point oculaire et il est placé à une distance $a_1 = -\frac{r}{s}$ en avant de l'oeil. Pour un oeil

myope ce point considéré comme point lumineux est réel, pour un oeil hypermétrope il est virtuel. Pour un oeil emmétrope $s = 0$ et le point est placé à l'infini, comme nous l'avons vu précédemment. Le point le plus rapproché (punctum proximum) est conjugué du point d'intersection de l'axe et de la rétine, si l'oeil est au maximum d'accommodation.

Le degré d'amétropie est donné par le pouvoir focal de la lentille infiniment mince que l'on doit placer devant l'oeil pour le rendre emmétrope, c. à. d. pour déplacer à l'infini le premier point oculaire. Considérons un point lumineux sur l'axe. L'image correspondante est située dans la rétine, c. à. d. que $A_r = 0$, si d'après la deuxième équation fondamentale

$D_1 = -\frac{s}{r} A_1$. On y arrive immédiatement en remarquant que

ce point lumineux est le premier point oculaire, de sorte que $x_1 = \frac{A_1}{D_1} = -\frac{r}{s}$. Il faut donc que la lentille infiniment mince, dont on cherche le pouvoir focal p (§ 3) donne cette divergence D_1 à des rayons incidents parallèles à l'axe. Comme p est la divergence finale d'un rayon incident parallèle à l'axe à amplitude 1, on a $p = \frac{D_1}{A_1} = -\frac{s}{r}$.

Pratiquement il ne sera jamais possible de rendre nulle la distance de la lentille à l'oeil. Supposons qu'elle soit à une distance d en avant de l'oeil. Représentons par c, p, r, s les constantes optiques de l'oeil, par $1, p', 0, 1$ celles de la lentille infiniment mince. Le système résultant de la combinaison doit être tel que $s = 0$. Soient c'', p'', r'', s'' les constantes de ce système, on a (§ 4), $s'' = p'(r + sd) + s = 0$, d'où $p' = -\frac{s}{r + sd}$. d étant petit, et r étant grand par rapport à s , on aura $p' > 0$ si $s < 0$; c. à d. que pour un oeil myope, la lentille devra être divergente. Elle devra être convergente pour un oeil hypermétrope.

Nous ferons encore voir que le pouvoir focal du système lentille et oeil prend une forme très simple.

On a $p'' = p'(c + pd) + p$, ou bien, comme $p' = -\frac{s}{r + sd}$, $p'' = -\frac{cs - pr}{r + sd} = -\frac{n_{a,1}}{s(\frac{r}{s} + d)}$. Comme $o_1 = -\frac{r}{s}$, $\frac{r}{s} + d$ est la

distance de la lentille au premier point oculaire. Cette distance doit être prise négativement si la lentille est placée en arrière du premier point oculaire. Les résultats que nous venons d'obtenir sont applicables à tout système dont la surface terminale passe par le deuxième foyer principal.

§ 25. *Achromatisation des systèmes optiques.*

a). *Conditions d'achromatisme absolu.* Un système optique sera en général achromatique, si les quatre constantes c, p, r, s sont les mêmes pour des rayons de réfrangibilité différente. Les quatre équations de condition que l'on obtient ainsi sont suffisantes pour garantir un achromatisme absolu. On peut toutefois chercher si elles sont toutes nécessaires. Remarquons d'abord que les quatre constantes ne sont pas indépendantes les unes des autres, puisque entre elles existe la relation $cs - pr = n_{a,1}$. On voit donc qu'elles ne pourront être indépendantes de la réfrangibilité des rayons que dans le cas où $n_{a,1} = 1$, c. à d. où les milieux extrêmes sont identiques.

On peut établir qu'un système optique est absolument achromatique, si pour toute distance de l'objet, les images sont formées dans un même plan normal à l'axe, et à la même distance de l'axe, quelle que soit la réfrangibilité des rayons. Cela revient à dire que la couleur ne peut avoir aucune influence ni sur la position du plan de l'image, ni sur le grossissement linéaire. Prenons à volonté sur un rayon incident deux points lumineux. Les images conjuguées doivent être indépendantes de la couleur. La droite passant par ces deux images est le rayon émergent conjugué du rayon incident. Il résulte de là que le rayon émergent conjugué d'un rayon incident donné doit être le même pour toutes les couleurs. Comme ce rayon émergent est déterminé par les divergence et amplitude finales, il faut donc, d'après les deux équations fondamentales, que c , p , r et s soient indépendants de la réfrangibilité des rayons. Les quatre équations de condition sont donc nécessaires ¹⁾.

L'achromatisme absolu, ainsi défini, est donc impossible si les milieux extrêmes sont différents, puisque entre les quatre constantes existe la relation $cs - pr = n_{a,1}$. Des systèmes optiques comme l'oeil ou un microscope avec objectif à immersion ne sauraient donc être absolument achromatiques.

On sait que si les images optiques sont formées non seulement par des rayons centraux, mais encore par des rayons marginaux, il se peut que pour une même distance de l'objet les plans de l'image pour les diverses couleurs coïncident, tandis qu'alors les images diversement colorées ne sont pas également grandes. Dans la reproduction optique par rayons centraux, ce cas n'est possible que si les milieux extrêmes sont différents. Si dans ce cas les plans de l'image sont les mêmes pour les diverses couleurs, le grossissement axial est indépendant de la couleur. Or, si l'on considère une portion infiniment petite, et normale à l'axe, de l'espace objet, on a $V_{ax} = -\frac{V^2}{n_{a,1}}$. Si donc $n_{a,1} = 1$, le grossissement linéaire aussi doit être indépendant de la couleur et les images coïncident entièrement; il n'en est pas de même si $n_{a,1} \geq 1$.

b). Conditions d'achromatisme dans les systèmes d'oculaires. Dans

¹⁾ Dans des cas particuliers, où quelques unes des constantes optiques prennent des valeurs constantes, le nombre des conditions est plus petit. Ainsi, pour une lentille infiniment mince, on a $c = 1$, $r = 0$, $s = 1$, et pour un système formé par la juxtaposition de pareilles lentilles $c = 1$, $r = 0$, $s = 1$, $p = p_1 + p_2 + \dots$, p_1, p_2, \dots étant les pouvoirs réfringents des diverses lentilles. On voit donc que dans ce cas p seul doit être indépendant de la couleur.

les oculaires des lunettes et microscopes, l'achromatisme peut être obtenu, quoique moins parfaitement, d'une autre façon. Remarquons d'abord que les faisceaux de rayons qui tombent sur l'oculaire, ont une faible ouverture. Dans les lunettes c'est une conséquence de la faible ouverture de l'objectif. Dans les microscopes au contraire l'ouverture des faisceaux incidents est très grande, ce qui, comme on sait, est nécessaire pour augmenter l'éclairement des images et le pouvoir résolvant du microscope. Mais, par suite du grossissement considérable obtenu par l'objectif même, l'ouverture des faisceaux de rayons qui viennent frapper l'oculaire, est faible (§ 10). D'autre part les rayons principaux de ces minces faisceaux forment, dans les lunettes et microscopes, de petits angles avec l'axe optique. Dans les lunettes cela résulte de ce que la divergence des rayons principaux incidents est petite, à cause de la grande distance de l'objet à la pupille d'entrée, formée par le bord même de l'objectif. Dans les microscopes aussi la divergence des rayons principaux incidents est faible, puisque, comme on le démontre dans la théorie générale des systèmes optiques, il n'est possible de reproduire nettement avec des faisceaux de rayons à très grande ouverture qu'un élément plan. La dimension de cet élément doit être petite par rapport à la distance focale principale de l'objectif du microscope. Si l'objectif est achromatique, les rayons principaux, diversement colorés, émis vers l'oculaire par un même point de l'image réelle, que forme l'objectif, coïncident. Après réfraction, chaque rayon principal, d'une couleur déterminée, passe par le centre de la pupille de sortie correspondante. En général les pupilles pour les diverses couleurs ne coïncident pas. On peut toutefois faire voir qu'un achromatisme suffisant s'obtient, si les rayons principaux réfractés de diverses couleurs, provenant d'un même rayon incident, sortent parallèles de l'oculaire.

Au § 23 nous avons déjà fait remarquer que le point d'intersection avec la rétine du rayon réfracté dans un oeil emmétrope, ne dépend que de la divergence du rayon incident. Nous considérons alors l'oeil comme achromatique. L'image du point lumineux est toujours située sur le rayon principal réfracté, et il en est de même du centre de gravité de toute section du faisceau réfracté. Pour des pupilles circulaires, dont les plans sont normaux à l'axe, et dont les centres sont situés sur l'axe, les rayons sont en effet toujours distribués symétriquement autour du rayon principal. Considérons donc les rayons principaux, diversement colorés, conjugués du rayon principal émis par un point de l'image

objective. Supposons qu'ils sortent de l'oculaire dans la même direction: alors ils coupent la rétine au même point; et cela indépendamment de la position de l'oeil. Si donc les images diversement colorées sont placées en ce point, il y a achromatisme absolu. Si tel n'est pas le cas, tout faisceau réfracté de couleur déterminée coupe la rétine suivant le cercle de diffusion. Les centres de gravité de ces cercles sont tous placés au point d'intersection commun des rayons principaux avec la rétine. L'impression lumineuse sera donc la plus forte en ce point et dans son voisinage immédiat. Si donc les cercles de diffusion ne sont pas trop grands, c. à. d. si les images diversement colorées ne sont pas trop distantes les unes des autres et du point d'intersection commun des rayons principaux, il n'y a pas d'achromatisme absolu, il est vrai, mais au moins, satisfaisant. La condition en question est toujours satisfaite. Il faut qu'il y ait une couleur pour laquelle l'image se forme dans la rétine elle même, pour que, sans l'aberration chromatique, une image nette puisse être observée. Les images produites par les autres couleurs se forment alors dans le voisinage de la rétine, puisque la dispersion dans l'oculaire ne peut pas être très grande pour les minces faisceaux incidents.

Nous venons de voir que, dans une lunette et un microscope, les rayons principaux qui tombent sur l'oculaire peuvent être considérés comme parallèles; on a donc $D_1 = 0$, et, d'après la deuxième équation fondamentale, $D_r = pA_1$. Nous supposons que l'objectif soit achromatique, de sorte que pour tout point de l'image objective les rayons principaux de diverses couleurs coïncident. A_1 est donc indépendant de la couleur, et il en est de même de D_r , c. à. d. que les rayons principaux émergents sont parallèles, si p est indépendant de la réfrangibilité. Comme p donne très approximativement la puissance du système optique, on peut donner à cette façon de rendre achromatique les systèmes oculaires le nom d'achromatisation de la puissance. Il résulte clairement de ce qui précède, qu'on ne peut l'appliquer qu'au cas où l'image formée par le système optique s'observe à l'oeil nu, et non par l'intermédiaire d'un autre système optique; donc seulement à des oculaires et non à des objectifs. Si l'objectif était achromatisé pour la puissance, l'image objective ne serait déjà plus achromatique. Dans ce cas il ne serait pas satisfait à la condition que les rayons principaux de diverses couleurs coïncident pour tout point de l'image objective.

Si l'oeil de l'observateur est amétrope, les points où les rayons principaux coupent la rétine après réfraction dans l'oeil, ne dépendent pas seulement de la divergence des rayons principaux

incidents, mais aussi de leur amplitude. Afin que les rayons principaux diversement colorés, provenant d'un même rayon principal pénétrant dans l'oculaire, puissent frapper la rétine en un même point, il faut que ces rayons principaux émergents coïncident. Si l'on suppose de nouveau que chaque rayon principal entre dans l'oculaire parallèlement à l'axe, les rayons principaux réfractés correspondants sont parallèles, si p est indépendant de la couleur, et ils coïncident si pour toutes les couleurs s a la même valeur. De la signification de s comme pouvoir étalant, il résulte que alors les rayons principaux émergents parallèles passent par un même point de la dernière surface réfringente de l'oculaire, et coïncident. Si l'on fait abstraction de la dispersion, on tachera de rendre l'image aussi nette que possible, donc de mettre au point l'oculaire de telle façon, que, pour une couleur déterminée les rayons des faisceaux émergents semblent venir de points situés dans le premier plan oculaire de l'oeil. Pour les faisceaux d'autres couleurs ces points sont alors situés dans le voisinage de ce plan, puisque les faisceaux qui pénètrent dans l'oculaire sont minces, et que la dispersion ne saurait être considérable.

Si p seul est indépendant de la couleur, les rayons principaux sont parallèles, mais les amplitudes finales dans l'oculaire diffèrent, pour deux couleurs déterminées, de $\Delta s \cdot A_1$, A_1 étant l'amplitude initiale d'un rayon principal parallèle à l'axe et Δs la différence entre les valeurs de s relatives aux deux couleurs. La divergence finale des rayons principaux est pA_1 , leur amplitude finale sA_1 . Ces deux rayons principaux coupent donc le premier plan oculaire de l'oeil (à une distance o_1 en avant de l'oeil) en deux points distants de $\Delta s \cdot A_1$, tandis que l'un d'eux coupe le plan oculaire en un point pA_1o_1 . Nous admettons ici que l'oeil soit placé en un point où pour une couleur déterminée, les rayons principaux coupent l'axe, donc dans la pupille de sortie correspondante de l'oculaire. Représentons de nouveau par ε la distance angulaire maxima des deux points que l'oeil distingue encore l'un de l'autre; alors l'achromatisme est d'autant plus parfait que $\Delta s \cdot A_1$ est plus rapproché de $\varepsilon \cdot o_1$. Si $\Delta s \cdot A_1 < \varepsilon \cdot o_1$ les rayons principaux réfractés dans l'oeil coupent la rétine en un même élément sensitif et les points d'intersection ne sont pas observés séparément. Plus grande est cette distance du point oculaire, plus parfait aussi est l'achromatisme, toutes autres conditions égales d'ailleurs. Pour une distance oculaire plus grande, l'oeil se rapproche de l'état emmétrope, qu'il atteint pour $o_1 = \infty$. Dans ce cas il est toujours satisfait à l'inégalité quelle que soit la valeur de s .

Appliquons les résultats obtenus à deux espèces d'oculaires. Pour un oculaire de Huygens ou de Ramsden, formé de deux lentilles très minces distantes de d , on a $p = \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2}$ (§ 12), où f_1 et f_2 sont

les distances focales principales des lentilles elles-mêmes. Afin que pour les rayons correspondant aux raies C et F de Fraunhofer, p ait la même valeur, soit $p_C = p_F$, il faut $\frac{1}{f_{1C}} + \frac{1}{f_{2C}} - \frac{d}{f_{1C} f_{2C}} =$

$\frac{1}{f_{1F}} + \frac{1}{f_{2F}} - \frac{d}{f_{1F} f_{2F}}$. Si l'on exprime les diverses distances focales principales en fonction de f_{1D} et f_{2D} au moyen des relations $\frac{1}{f_{1C}} = \frac{1}{f_{1D}} \cdot \frac{n_C - 2}{n_D - 1}$, etc., la relation devient $\frac{1}{f_{1D}} + \frac{1}{f_{2D}} = \frac{d}{f_{1D} f_{2D}}$
 $\frac{n_C + n_F - 2}{n_D - 1}$. Comme on a approximativement $n_C + n_F = 2 n_D$,

cette relation peut encore s'écrire $f_{1D} + f_{2D} = 2d$. A cette relation on satisfait en prenant un oculaire de Huygens où $f_{1D} : d : f_{2D} = 4 : 3 : 2$. Au lieu de cette relation on donne parfois cette autre $f_{1D} : d : f_{2D} = 3 : 2 : 1$, qui satisfait aussi à la condition d'achromatisme de la puissance. Pour l'oculaire de Ramsden on pose $f_{1D} : d : f_{2D} = 1 : 1 : 1$, de sorte qu'ici aussi la condition est remplie. On prend toutefois f_{1D} un peu plus grand, afin que le premier foyer principal ne soit pas placé dans la première lentille, mais en avant de celle-ci.

Pour une combinaison de deux lentilles minces $s = 1 - \frac{d}{f}$ (§ 12). De la même manière que précédemment on trouve $\Delta s = s_C - s_F = \frac{d}{f_{1D}} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$. Le deuxième facteur de Δs est le pouvoir dispersif de la première lentille, un nombre abstrait dont la valeur n'est que de centièmes. Dans l'oculaire de Ramsden $\frac{d}{f_{1D}} = 1$, dans celui de Huygens, où $f_{1D} : f_{2D} = 3 : 2 : 1$, $\frac{d}{f_{1D}} = \frac{2}{3}$. On voit donc que pour des yeux amétropes, l'achromatisme est un peu moins parfait avec ces oculaires.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pag.
§ 1. Introduction	5.
I. Propriétés géométriques des images formées par des rayons centraux.	
§ 2. Equations fondamentales	7.
§ 3. Signification des constantes optiques	8.
§ 4. Combinaison de deux systèmes	10.
§ 5. Renversement du système	11.
§ 6. Constantes optiques d'une surface réfringente unique et d'une lentille infiniment mince	11.
§ 7. Relation générale entre les constantes optiques d'un système	12.
§ 8. Relations entre les situations d'un point lumineux et de son image. Grossissement linéaire	13.
§ 9. Points remarquables. Anneaux oculaires	15.
§ 10. Grossissements angulaire et axial	17.
§ 11. Construction de l'image	21.
§ 12. Constantes optiques d'une lentille et de la combinaison de deux lentilles	22.
§ 13. Modification de la divergence des rayons dans un système optique	24.
§ 14. Situation des foyers principaux	27.
§ 15. Systèmes télescopiques	31.
II. Propriétés physiques des images. Délimitation des faisceaux lumineux. Eclairement des images et profondeur de l'espace objet.	
§ 16. Influence des diaphragmes sur la délimitation des faisceaux lumineux. Champ visuel	34.

	Pag.
§ 17. Grossissement.....	38.
§ 18. Puissance d'un système optique.....	40.
§ 19. Eclairement de l'image.....	41.
§ 20. Profondeur du champ.....	43.
§ 21. Influence de la situation des pupilles sur les mesures faites à l'aide d'image optiques.....	49.
§ 22. Perspective de l'image optique.....	53.
III. Constantes optiques de l'oeil et conditions d'achromatisme.	
§ 23. Constantes optiques de l'oeil emmétrope.....	55.
§ 24. Variations des constantes optiques de l'oeil par l'ac- commodation. Œil amétrope.....	59.
§ 25. Achromatisation des systèmes optiques.....	62.
a). Conditions d'achromatisme absolu.	
b). Conditions d'achromatisme dans les systèmes d'oculaires.	63.

Signification des grandeurs et principales relations employées dans cet ouvrage.

§ 2. D_1 et A_1 : divergence et amplitude du rayon incident
 D_r et A_r : „ „ „ „ „ „ „ „ réfracté.

Equations fondamentales $D_r = cD_1 + pA_1$, $A_r = rD_1 + sA_1$ (I).

§ 3. c = rapport des divergences ou grossissement angulaire dans
le deuxième plan oculaire.

— p = pouvoir focal.

$\frac{1}{r}$ = puissance au premier point oculaire pour un objet placé
dans la dernière surface réfringente.

s = pouvoir dilatant.

§ 4. Combinaison de deux systèmes avec les constantes optiques
 c_1, p_1, r_1, s_1 , et c_2, p_2, r_2, s_2 .

$$\begin{aligned} c &= c_1 (c_2 + p_2 d) + r_1 p_2 & r &= c_1 (r_2 + s_2 d) + r_1 s_2 \\ p &= p_1 (c_2 + p_2 d) + s_1 p_2 & s &= p_1 (r_2 + s_2 d) + s_1 s_2 \end{aligned} \quad \text{(II).}$$

§ 5. Constantes optiques du système inverse.

$$c' = \frac{s}{N}, \quad p' = \frac{p}{N}, \quad r' = \frac{r}{N}, \quad s' = \frac{c}{N}, \quad N = cs - pr \quad \text{(III).}$$

§ 6. Constantes optiques d'une surface réfringente unique.

$$c = \frac{1}{n_{1,2}}, \quad p = \frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}} \frac{1}{R}, \quad r = 0, \quad s = 1.$$

Constantes optiques d'une lentille infiniment mince

$$c = 1, \quad p = -\frac{1}{F}, \quad r = 0, \quad s = 1.$$

§ 7. $cs - pr = (c_1 s_1 - p_1 r_1)(c_2 s_2 - p_2 r_2) \dots (c_a s_a - p_a r_a) = n_{a,1}$ (IV).

§ 8. x_1 = distance d'un point lumineux à la première surface réfringente.

x_2 = distance de l'image à la dernière surface réfringente.

$$x_2 = -\frac{r + sx_1}{c + px_1} \quad (\text{V}).$$

$$V = \text{grossissement linéaire} = \frac{n_{a,1}}{c + px_1} = s + px_2 \quad (\text{VI}).$$

§ 9. Distances focales principales: $f_1 = -\frac{c}{p}$, $f_2 = -\frac{s}{p}$.

Distances des points oculaires $O_1 = -\frac{r}{s}$, $O_2 = -\frac{r}{c}$.

$$f_1 \cdot O_2 = f_2 \cdot O_1.$$

ξ_1 et ξ_2 : distances du point lumineux et de son image aux foyers principaux:

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{n_{a,1}}{p^2} \quad (\text{VII}).$$

$$V = p \xi_2 = \frac{n_{a,1}}{p \xi_1} \quad (\text{VIII}).$$

Distances de l'objet et de l'image correspondant à un grossissement linéaire déterminé V :

$$x_1 = \frac{1}{p} \left(-c + \frac{n_{a,1}}{V} \right), \quad x_2 = \frac{1}{p} (-s + V).$$

§ 10. Grossissement angulaire $V_a = c + px_1 = \frac{n_{a,1}}{s + px_2} =$

$$= p \xi_1 = \frac{n_{a,1}}{V} \quad (\text{IX}).$$

$$\text{Grossissement axial } V_{ax} = -\frac{VV'}{n_{a,1}} \quad (\text{X}).$$

$$\text{Théorème de Lagrange } n_1 y_1 D_1 = n_a y_2 D_r \quad (\text{XI}).$$

§ 12. Constantes optiques d'une lentille:

$$c = 1 - \frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}} \frac{d}{R_2}, \quad p = (n_{1,2} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{(n_{1,2} - 1)^2}{n_{1,2}} \frac{d}{R_1 R_2},$$

$$r = \frac{d}{n_{1,2}}, \quad s = 1 + \frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}} \frac{d}{R}.$$

Constantes optiques d'un système de deux lentilles infiniment minces à une distance d l'une de l'autre:

$$c = 1 - \frac{d}{f_2}, \quad p = \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2}, \quad r = d, \quad s = 1 - \frac{d}{f_2}.$$

Foyers principaux et points oculaires d'un système de deux lentilles distantes de d :

$$F_1 = f_1 + \frac{f_1^2}{\Delta}, \quad F_2 = f_2 + \frac{f_2^2}{\Delta}, \quad \Delta = d - f_1 - f_2$$

$$\S 14. \quad O_1 = -\frac{d}{1 - \frac{d}{f_1}}, \quad O_2 = -\frac{d}{1 - \frac{d}{f_2}}$$

§ 15. Systèmes télescopiques

$$p = 0, \quad V = s, \quad V_a = c = \frac{n_{a,1}}{s}, \quad V_{ax} = -\frac{s^2}{n_{a,1}}.$$

Système télescopique, formé de deux autres non télescopiques:

$$c = -\frac{n_{a',1} \rho_2}{\rho_1}, \quad s = \frac{n_{a',1} \rho_1}{\rho_2}$$

où 1 et a' , a' et a sont les milieux extrêmes des deux systèmes.

§ 18. Puissance: $V = p \frac{\xi_2}{\xi_2'}$; ξ_2 et ξ_2' : distances de l'image et de la pupille de sortie au deuxième foyer principal.

§ 20. ε = valeur angulaire de la plus petite distance appréciable.
 α = angle sous lequel la pupille d'entrée est vue du plan de visée.

$$\text{Profondeur focale } \frac{2\varepsilon}{\alpha V}.$$

$$\text{Profondeur d'accommodation } 2 An_{a,1} \frac{1}{V_2}.$$

A = l'amplitude d'accommodation.

Rapport de la profondeur focale au diamètre du champ $\frac{\varepsilon}{\alpha \beta}$

2β = diamètre du champ visuel dans l'espace de l'image.

Rapport de la profondeur d'accommodation au diamètre du

$$\text{champ: } \frac{An_{a,1}}{\beta} \cdot \frac{1}{V}.$$

§ 21. Facteur de réduction dans les mesures à l'aide d'images

optiques: $\frac{1}{f_a} \frac{\xi_1}{\xi_2}$.

V_a = grossissement angulaire dans la pupille de sortie.

ξ_1 et ξ_2 , distances de l'objet et de l'image à la pupille d'entrée.

Facteur de réduction dans le cas;

a). d'un faisceau télécentrique du côté de l'objet: $\frac{1}{p \xi_2}$.

b). „ „ l'image: $\frac{\xi_1 p}{n_{a,1}}$.

c). „ „ l'objet et de l'image: s .

§ 22. Distance à laquelle on doit observer des images optiques afin d'obtenir l'impression exacte de perspective $A = \xi_2 V_a$;

V_a = grossissement angulaire dans la pupille de sortie.

§ 23. Œil emmétrope: $D_r = cD_1 + pA_1$, $A_r = rD_1$.

$c = 0,6635$, $p = -0,04828$, $r = 15,494$, $s = 0$.

$\xi_2 = \frac{311,5}{x_1 - 13,74}$.

Rayon du cercle de diffusion $r \frac{p}{A}$, A = distance de l'ob-

jet, p = diamètre de la pupille d'entrée = 2,26 mm.

§ 24. Œil accommodé pour la distance 152,2 mm., $\xi_2 = \frac{261,5}{x_1 - 12,13}$.

$c = 0,6488$, $p = -0,05349$, $r = 15,200$, $s = -0,09986$.

Amétropie: $s > 0$ hypermétropie, $s < 0$, myopie.

Pouvoir réfringent de la lentille infiniment mince placée immédiatement en avant de l'oeil, et rendant emmétrope un oeil amétrope: $p = -\frac{s}{r}$; pour une lentille placée à une distance d en

avant de l'oeil $p = -\frac{n_{a,1}}{r + sd}$.

E R R A T A.

Page 14, lignes 13 et 19, lisez symétrie au lieu de symmétrie.

.. 17, ligne 1, lisez $\frac{n_{a,1}}{V}$ au lieu de $\frac{V}{n_{a,1}}$.

.. 39, ligne 26, lisez réfringente au lieu de réfringante.

Over peroxy-azijnzuur zilver
en, als vervolg,
over peroxy-zwavelzuur zilver

(Zevende Verhandeling)

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL VII. N^o. 6

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
September 1900.

Over peroxy-azijnzuur zilver
en, als vervolg,
over peroxy-zwavelzuur zilver

(Zevende Verhandeling)

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL VII. N^o. 6.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1900.

Over peroxy-azijnzuur zilver
en, als vervolg,
over peroxy-zwavelzuur zilver

DOOR

E. MULDER.

(Zevende Verhandeling).

Een voortgezette studie der electrolyse van *azijnzuur zilver* maakt het grootste gedeelte uit dezer Verhandeling. Als eerste voorbeeld der electrolyse van een zilverzout met een *organisch zuur*, op de wijze als die van salpeterzuur zilver en zwavelzuur zilver, is de electrolyse van azijnzuur zilver wel waard, om met zorg te worden nagegaan; ook met 't oog op de classieke reactie van Kolbe (zie de voorgaande Verhandeling), die daarvan wellicht een parallele of secondaire reactie uitmaakt. Want men heeft hier waarschijnlijk te maken met een moleculaire verbinding van *zilverbioxyde* met een *zilverzout van een organisch oxy-zuur*, en mogelijk van azijnzuur. Het zou toch altijd kunnen wezen, en zoo ook in overeenkomstige gevallen, dat het zuur van het oorspronkelijke zilverzout wordt omgezet in een ander zuur, als gevolg eener oxydatie. En het is wel goed, daaraan onmiddellijk toe te voegen, dat een studie in dien zin groote bezwaren oplevert, en veel tijd zal vereischen, alvorens men in staat zal wezen, feiten te doen kennen, die genoegzaam vaststaan, voor zooverre de samenstelling betreft, en bijgevolg de formule, waarbij men vooral 't oog heeft op de structuurformule van het zwarte product van electrolyse. Zoo moet men kunnen beschikken over een uitgewerkte analyse van het zilverzout, dat in oplossing treedt, wanneer het lichaam,

waarvan sprake is, met water wordt behandeld (maar zulk een analyse vordert een hoeveelheid stof, die vooreerst niet zou te bereiken zijn dan ten koste van een groot aantal Bereidingen, bij elkander te voegen). Want, zooals reeds werd opgemerkt, zou het zilverzout een afgeleide kunnen zijn van het azijnzuur zilver, door oxydatie gevormd. Er werd evenwel aangetoond, dat dit zout *oplosbaar* is (zie de vorige Verhandeling), en zonder er een analyse van te hebben gedaan, weet men bij gevolg reeds, dat het geen koolzuur zilver is, enz.. Overigens is het duidelijk, dat gezegde omzetting niets wijzigt met betrekking tot de hoofdzaak, die ons bezighoudt, te weten het bestaan van een peroxy-zuur zilver van anorganische en *organische zuren* („zuur” in de plaats tredende van zwavelzuur, salpeterzuur, azijnzuur, enz.).

Behalve het zooeven genoemde, zullen in 't volgende eenige gegevens worden medegedeeld met betrekking tot de voortgezette studie van *peroxy-zwavelzuur zilver*, waarvan vooral de bereidingswijze nog vatbaar is voor een noemenswaardige verbetering. In de eerste plaats evenwel zal men handelen over de electrolyse van *azijnzuur zilver*, en vooral over het zwarte product daarbij gevormd.

Vervolg der voorloopige analyse ¹⁾ *van de Bereidingen N°. 5, 7, 8, 9, 10, 11 en 12, te zamen genomen.* Het terugblijvende van het eerste uittrekken met water (bij gewone temperatuur), werd andermaal met water behandeld (onder overigens gelijke omstandigheden), aangezien wat zilverbioxyde was méegevoerd, met het doel een uitkomst te hebben, die meer correct is (en toch zonder te filtreeren; met 't oog op de beperkte hoeveelheid stof), in de eerste plaats met betrekking tot de quantitatieve bepaling van het *oplosbare zilverzout* (als ontledingsproduct van het peroxy-azijnzuur zilver). Achtereenvolgens werd gevonden:

		te zamen :
1 ^{ste}	maal 0.022 gr.	0.022 gr.
2	0.0014	0.0234
3	0.0003	0.0237

, of 20.98 proc. aan opgelost zilverzout. Er bleef onopgelost 0.0004 gr., dat maakt: 0.0237 gr. + 0.0004 gr. = 0.0241 gr. (zijnde in den aanvang 0.0239 gr., dus een verschil gevende van 0.0241 gr. — 0.0239 gr. = 0.0002 gr.).

Bereiding eener nieuwe hoeveelheid der zwarte verbinding, als product

¹⁾ Zie de vorige Verhandeling.

der electrolyse van azijnzuur zilver; en wel ter analyse. Er werd uitgegaan van dezelfde oplossing van azijnzuur zilver, welke reeds vroeger had dienst gedaan bij de bereidingen. Deze oplossing was niet meer in contact met een overmaat van vast azijnzuur zilver, zooals dat in 't begin het geval was, terwijl de concentratie was verminderd als gevolg der electrolyse, en deze vele malen plaats vond; ook was het met opzet, dat thans met een *niet* verzadigde oplossing werd gewerkt (zie later). Met iedere nieuwe bereiding werd dikwerf bij het gebruikte zilveroxyde wat versch oxyde gedaan (van den aanvang der bereidingen af, wat koolzuur zilver bevattende), en wel zóólang, tot de hoeveelheid te groot zou geworden zijn voor het filtrum (zijnde genoegzaam van eenzelfde grootte). Nog werd steeds gebruik gemaakt van het *kleine* glazen schaalkje (waarmede begonnen was bij Bereiding N° 10; zie de voorgaande Verhandeling).

Over de Bereidingen N° 13, N° 14, N° 15 en N° 16. De volgende opgave geeft terug de opbrengst van genoemde vier Bereidingen, maar tevens eenige andere gegevens, geplaatst onder letters, waarvan de beteekenis elders werd medegedeeld (zie de voorgaande Verhandeling):

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N° 13	3	0.0294 gr.		0.0249 gr.	0.0249 gr.	
N° 14	3	0.0381	0.0248 gr.	0.0352	0.06	0.0001 gr.
N° 15	3	0.0304	0.0599	0.0275	0.0874	0.0001
N° 16	3	0.0653	0.0874	0.0597	0.1471	

Een vergelijking van deze reeks met de eerste ¹⁾ toont een verbetering aan voor zooverre betreft de opbrengst, die betrekkelijk nog al goed is. Het is evenwel nog uiterst moeilijk, daarvan de reden te leeren kennen, zooals trouwens duidelijk is, in aanmerking genomen, dat men zich nog oefent, om de bereiding meer en meer meester te worden, en wel door vele reeksen van Bereidingen te maken. Zelfs, zonder het te willen, brengt men aldus kleine wijzigingen aan, die vaak meer of minder verbeteringen zijn. Toch is het een feit, dat de concentratie in den aanvang bedroeg 10.28 gr.

¹⁾ Zie verh. der K. A. v. Wetenschappen te Amsterdam, 1e sectie, Dl. VII. No. 2, p. 39.

actie is mogelijk, hetzij dat zij geheel geschiedt, hetzij ten deele; en als gevolg dezer oxydatie, zal een ander zilverzout optreden (namelijk het zout van een ander zuur, afgeleid van azijnzuur). Ook vond men het tamelijk waarschijnlijk, dat het gedeelte der stof, hetwelk nog niet was ontleed, dit wel zou worden als gevolg der verschillende behandelingen later met water (tevens bij gewone temperatuur), al zou daaronder de quantitatieve bepaling der „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” in juistheid lijden. Maar zelfs aldus werkende, zou men wellicht toch eenige oxydatie niet kunnen voorkomen in gemelden zin, daar de zwarte stof is van endothermischen aard, wat betreft het ontstaan. En de energie, die vrij komt, zou van een betrekkelijk groote spanning kunnen zijn, en als gevolg daarvan gemakkelijk een oxydeeren kunnen teweeg brengen van het azijnzure zout, namelijk bij aanwezigheid van water. De analyse alléén zou in staat zijn, om ons daarvan op de hoogte te brengen. Zooals bij het verrichten der eerste analyse, werd een weinig zwarte stof medegevoerd bij decanteeren, en bijgevolg zal de hoeveelheid van 0.0292 gr. waarschijnlijk *te hoog* zijn (al werd de stof omgekristalliseerd, evenwel zonder te filtreeren). Dit maakt, berekend op 100 gew. d. der zwarte verbinding, 19.89 p. c. aan azijnzuur zilver (daarlatende, of het oorspronkelijke zout werd omgezet, hetzij ten deele, hetzij geheel). De hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van oxy-azijnzuur zilver, verondersteld deel uit te maken der zwarte electrolytische stof, namelijk van peroxy-azijnzuur zilver) is 0.0056 gr., overeenkomende met 3.8 p. c.. De som dezer twee samenstellende bestanddeelen is bijgevolg: $19.89 + 3.8 = 23.69$ p. c., zoodat er over blijft voor het zilverbioxyde 76.31 p. c. (zijnde $100 - 23.69 = 76.31$). Bijgevolg is de samenstelling der zwarte stof dan:

zilverbioxyde	76.31
azijnzuur zilver (voorloopig aangenomen)	19.89
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van oxy-azijnzuur zilver), en mogelijk water, enz. ¹⁾	3.8
	100.

Zooals reeds boven gezegd, 19.89 p. c. is wellicht iets te hoog, en bijgevolg 76.31 p. c. te laag.

Er deed zich eenige abnormaliteit voor, daarin bestaande, dat het terugblijvende, bedragende 0.1017 gr., vermeerderd met 0.0313 gr.

¹⁾ Zie deze Verhandeling, pag. 26, 28.

van het zout (*vóór* omkristallisatie) = 0.133 gr. een „te groot verschil aanbod met 0.1417 gr. (zie vroeger), namelijk van 0.0087 gr., waarvan op 't oogenblik geen verklaring zou kunnen gegeven worden, aangezien nog maar alleen de eerste stap werd gedaan op dit onbekende gebied, namelijk wat betreft de noodige kennis, om voldoende te kunnen dringen in de structuur van het zwartelichaam. En het zou niet minder dan voorbarig wezen, thans te trachten, daarvan de oplossing te geven, aangezien de vereischte gegevens bijkans geheel ontbreken. Men begrijpt overigens, dat zich *water* zou kunnen vormen, en *kooldioxyde*, als gevolg van oxydatie (zij dit ook ten koste van zilverbioxyde), zonder te spreken van de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” van het oxy-azijnzuur zilver, dat misschien *nog niet geheel was ontleed*. Ook is niet buitengesloten eenige bron van fouten, die alleen door nieuwe analyses zou te vinden zijn.

Zonder zich nog veel in te laten met de formule van peroxy-azijnzuur zilver, is het genoegzaam onmogelijk niet te trachten, zich enig denkbeeld te vormen van de structuur dezer verbinding. En, daarin aannemende de aanwezigheid van azijnzuur zilver (nog te bewijzen), zou voorloopig voor de samen stelling kunnen genomen worden:



zilverbioxyde	78.89
azijnzuur zilver	17.71
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van oxy- azijnzuur zilver).	3.4
	<hr/> 100. <hr/>

Vergelijking tusschen het peroxy-azijnzuur zilver en het peroxy-salpeterzuur zilver. Al dadelijk is azijnzuur een éénbasisch zuur als salpeterzuur. Maar daarenboven is het mol. gew. van azijnzuur zilver ($CH_3 CO. O Ag$) ongeveer hetzelfde als dat van salpeterzuur zilver ($N O_2. O Ag$), want men heeft:

$$CH_3. CO. O Ag = 166.5$$

$$N O_2. O Ag = 169.55.$$

Voor de formule van peroxy-salpeterzuur zilver was gegeven: $3 Ag_2 O_2. N O_3 Ag. 2 O$, dus veel analogie bezittende met de formule, zeer voorloopig gegeven, voor peroxy-azijnzuur zilver, zijnde

deze: $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot O Ag \cdot 2 O$. En wat de samenstelling betreft, zoo heeft men:

$3 Ag_2 O_2 \cdot NO_2 \cdot O Ag \cdot 2 O : 3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot O Ag \cdot 2 O :$

zilverbioxyde	78.64	78.89
zilverzout	17.98	17.71
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”		
(van het oxy-zilverzout)	3.38	3.4
	<hr/> 100.	<hr/> 100.

Zooals reeds werd opgemerkt, is het gehalte aan zilverzout van het peroxy-azijnzuur zilver blijkbaar *te hoog* bevonden, in de eerste plaats daarop lettende, dat de zeer beperkte hoeveelheid aan stof een filtreeren niet wel toeliet ¹⁾, en bijgevolg het zilverbioxyde *te laag* aangegeven. Evenwel zou een ernstige bespreking nog voorbarig zijn, ook met 't oog op het niet verklaard verschil, waarvan vroeger sprake was, zie pag. 9. Men zou nog verscheiden aanmerkingen kunnen maken, wat betreft het gehalte der zwarte stof aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van oxy-azijnzuur zilver), die b.v. de theoretische hoeveelheid zou te boven gaan. Dit nu zou niet normaal wezen, en in tegenspraak met hetgeen vroeger is gezegd (toen werd gehandeld over peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver), maar het geldt hier een ander geval. In de eerste plaats is de hoeveelheid beschikbare stof betrekkelijk te klein, om numerieke uitkomsten te verwachten, die tamelijk nauwkeurig zouden zijn; en, dat van niet minder belang is, de zwarte stof kan ten deele ontleed zijn, vooral bij het werken met zulke kleine hoeveelheden. Ook mag niet worden vergeten, dat het handelt in het onderhavige geval, over een zout met *een organisch zuur*; en, vooral op dit oogenblik, ontbreken nog de gegevens, om te weten te kunnen komen, wat er plaats heeft, wanneer de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” los komt. Zoo weet men nog niet, of het zilverzout (met water uitgetrokken) wel is azijnzuur zilver (de oplosbaarheid maakt dit overigens niet onwaarschijnlijk). Maar gelukkig wil het voorkomen, dat het gewenschte doel meer en meer wordt benaderd; en het is reeds iets, van zich eenig denkbeeld te kunnen maken omtrent de samenstelling en de structuurformule van een lichaam,

¹⁾ Zie: Verhand. d. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam (Eerste Sectie), Deel VI. N° 1. pag. 18.

dat in den aanvang optrad in een hoeveelheid zóódanig gering, dat ieder onderzoek onmogelijk scheen te zijn.

Bereiding N° 17, N° 18, N° 19 en N° 20. Bereiding N° 17. Bij het zilveroxyde, dat reeds had gediend, werd gedaan een hoeveelheid van ongeveer 20 gr. (bevattende *trouwens eenig* koolzuur zilver). *Bereiding N° 18.* Er werd geen nieuwe hoeveelheid zilveroxyde toegevoegd (namelijk bij het reeds gebruikte). Een deel der zwarte stof was afgezet buiten het glazen schaalkje bij de electrolyse, dat beteekent, dat dit verloren is voor de analyse, en hetzelfde greep vroeger plaats bij de andere Bereidingen. Om die reden werd de anode wat meer geplaatst *in het midden* van het glazen reservoir, en meer nabij de schroef van Archimedes. Ook geschiedde het wasschen op een andere wijze, in zooverre als dit plaats had in *een bekerglas* (terwijl dit tot dusverre geschiedde in *een glazen schaalkje*), met het doel, zoo weinig mogelijk stof te verliezen. Alhoewel de opbrengst deze laatste wijziging schijnt te rechtvaardigen (de concentratie kan tevens een der factoren uitmaken), de analyse daarentegen schijnt deze wijziging in het wasschen niet te wettigen; en het is duidelijk, dat eerder de hoedanigheid dan de hoeveelheid van overwegend belang is. *Bereiding N° 19 en N° 20.* Er werd geen nieuwe hoeveelheid zilveroxyde toegevoegd, omdat de hoeveelheid, die reeds dienst had gedaan, toereikende was. Er bevond zich na de bereiding, betrekkelijk weinig zwarte stof buiten het glazen schaalkje (terwijl overigens werd te werk gegaan als het geval was bij Bereiding N° 18).

De volgende opgave (zie pag. 5) bevat een overzicht der vier laatste Bereidingen, waarvan een analyse is gedaan, te weten van deze vier *zamen* genomen, dus bijgevolg gedaan in hetzelfde reageerbuisje:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N° 17	3	0.0519 gr.	—	0.0468 gr.	0.0468 gr.	
N° 18	3	0.0843	0.0468 gr.	0.0774	0.1242	
N° 19	3	0.1102	0.1242	0.1031	0.2273	
N° 20	3	0.0843	0.2272	0.075	0.3022	0.0001 gr.

De opbrengst is dus vermeerderende, en dat wel, zonder het aanbrenge van noemenswaardige veranderingen in de wijze van bereiding, maar alleen van kleine wijzigingen.

Het is in 't belang der analyse, wanneer de zelfontleding langzaam plaats heeft (noodwendig bij afwezigheid van water). Daarvan kan men zich overtuigen door de waarde, die zich bevindt onder *g* (zie overigens later, voor zooverre het geval betreft, dat ons bezighoudt). Ook in verband met het verschil in tijd tusschen de weging onder *f*, zij dit van 0.0468 gr. en 0.2273 onder *f*, welke 14 dagen bedraagt, en die onder *f* van 0.2273 gr. en onder *d* van 0.2272 gr., die zijnde van 11 dagen, dus een verlies vertegenwoordigende van 0.0001 gr. in 25 dagen op 0.2273 gr. zwarte stof (Bereiding N° 20 is daarbij per se niet begrepen). De hoeveelheid stof in de reageerbuis bedroeg bij gevolg 0.3022 gr. + 0.0001 gr. = 0.3023 gr.. Er werden 2 c. c. water bij gedaan, terwijl men het geheel liet staan (bij gewone temperatuur), tot zich geen gasbellen meer vertoonden. De buis werd toen geplaatst onder een vacuum-exsiccateur; er bleef terug 0.2988 gr., dus een verschil gevende van 0.3023 gr. — 0.2988 gr. = 0.0035 gr. of 1.1 proc.. De „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van oxy-azijnzuur) was waarschijnlijk grootendeels reeds vrijgekomen, alvorens de stof aan een analyse werd onderworpen. Thans werd een dubbele hoeveelheid water toegevoegd, dus 4 c. c. (met 't oog op de beperkte oplosbaarheid van het zilverzout) bij het terugblijvende, dat azijnzuur zilver kan wezen, terwijl men andermaal het geheel liet staan (bij gewone temperatuur); er kwamen nog eenige gasbellen vrij. De massa had de eerste maal reeds 26 dagen gestaan, en ditmaal 28 dagen, terwijl het verlies niet meer bedroeg dan 0.002 gr.. De som is derhalve die van 0.0037 gr., dat slechts bedraagt 1.22 proc.. Het besluit blijft dus hetzelfde (zie boven). Bij de massa werden overigens 4 c. c. water gedaan en te werk gegaan als naar gewoonte, namelijk aanvankelijk verhit tot en bij 60°—70°, en daarna tot en bij 70°—80°. Er had een toename plaats in gewicht van slechts 0.0001 gr., anders gezegd, er had geen noemenswaardig verschil plaats gevonden. Alles te zamen genomen, bedraagt het verlies dus 0.0036 gr. (zijnde 0.0037 gr. — 0.0001 gr.) of 1.19 proc.. Dit resultaat is verre van gunstig, en zooals reeds zooeven gezegd, moet voor 't oogenblik worden aangenomen, dat de grootste hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van het oxy-azijnzuur zilver) reeds was ontweken, alvorens tot de analyse werd overgegaan. Er is reden te veronderstellen, dat de hoeveelheid waschwater, die veel meer bedroeg dan tot dusverre, te groot was in verhouding tot de zeer geringe hoeveelheid aan zwarte stof.

Een hoeveelheid van 2 c. c. der zilveroplossing, nadat Bereiding

N^o 20 was afgegaan, gaf 0.01 gr. aan zilverzout of 5 gr. op één liter (terwijl de concentratie in den aanvang was ongeveer 10 gr., zijnde toen de oplossing verzadigd).

Met water behandeld bij gewone temperatuur, werd achtereenvolgens gevonden:

		te samen:
1 ^{ste} maal	0.0238 gr.	0.0238 gr.
2	0.0124	0.0362
3	0.0024	0.0386
4	0.0012	0.0398
5	0.0006	0.0404
6	0.0009	0.0413
7	0.0003	0.0416.

Het terugblijvende bedroeg 0.2595 gr., namelijk aan zilverbioxyde. De som van 0.0416 gr. en 0.2595 gr. is 0.3011 gr.; er werd gevonden 0.2983 gr. (zie vroeger), dat een verschil geeft van 0.0028 gr..

Na te worden omgekristalliseerd, werd gevonden:

		te samen:
1 ^{ste} maal	0.0242 gr.	0.0242 gr.
2	0.0111	0.0353
3	0.0012	0.0365
4	0.0002	0.0367
5	0.0001	0.0368.

Ditmaal bedroeg het terugblijvende 0.0059 gr. (er werd niet gefiltreerd); dat geeft: 0.0368 gr. + 0.0059 gr. = 0.0427 gr., en 0.0427 gr. — 0.0416 gr. = 0.0011 gr..

Berekend voor 0.0368 gr., geeft dit op 0.3023 gr. stof aan zilverzout 12.17 p. c., zijnde de samenstelling op 100 gew. d.:

II	
zilverbioxyde	86.61
zilverzout	12.17
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, enz.	1.22
	— — — — —
	100.
	— — — — —

Deze analyse is veeleer als mislukt te beschouwen.

Nieuwe reeks van Bereidingen. Bereiding N°. 21. Er werd een nieuwe hoeveelheid zilveroxyde gedaan bij die, waarvan men zich bediende in voorgaande proeven (welk laatste een noemenswaardige hoeveelheid koolzuur zilver bevatte). Ten einde een oplossing te hebben, die betrekkelijk sterk alkalisch is en homogeen, liet men den toestel (te weten de schroef van Archimedes) twee dagen (dag en nacht) werken, vóór dat electrolyse plaats had. De anode was zeer dicht geplaatst bij de schroef; en, zooals bekend, in het kleine schaalte (waarvan reeds vroeger bij eenige bereidingen werd gebruik gemaakt). Ook geschiedde het wasschen opnieuw in dit kleine schaalte, en verliet men bijgevolg de laatstelijk aangebrachte wijziging (zie de Bereidingen N°. 18, 19 en 20). Men wilde namelijk liever betrekkelijk veel verliezen aan zwarte stof, dan kans hebben, dat de stof ten deele werd ontleed onder den invloed eener te groote hoeveelheid waschwater. Door te wasschen in het kleine schaalte, gaat de zeer fijn verdeelde stof grootendeels verloren, en is er meer kans, een zuiverder product in handen te hebben, dat bijgevolg ook minder aanrakingspunten zal bieden aan het water, aangezien de stof digter is. De opbrengst was die van 0.146 gr. (na te zijn overgebracht in een reageerbuis van veel grooter afmeting dan die vroeger gebruikt). Overigens verliest men aan zwarte stof, zoowel bij het overbrengen, als in 't begin bij het wasschen.

Bereiding N°. 22. De opbrengst bedroeg 0.0927 gr., terwijl dezelfde weg werd gevolgd.

Bereiding N°. 23. De opbrengst strekte zich uit tot 0.1137 gr.. Een overzicht betreffende deze drie Bereidingen vindt men in de volgende opgave (zie vroeger, overeenkomstige gegevens):

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N° 21	3	0.155 gr.	—	0.146 gr.	0.146 gr.	—
N° 22	3	0.104	0.1458	0.0927	0.2385	0.0002 gr.
N° 23	3	0.1137	0.2381	0.1012	0.3393	0.0004

De stof (bijgevolg bedragende in het buisje 0.3393 gr.) werd met water behandeld (zijnde 4 c. c.), en aanvankelijk verhit bij 60°—70°,

vervolgens bij 70° — 80° . Daarna werd de buis geplaatst onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur alleen); het terugblijvende was 0.3247 gr.. De hoeveelheid stof bedroeg: 0.3393 gr. + 0.0006 gr. = 0.3399 gr., en bijgevolg vindt men voor het verschil in gewicht, als gevolg der behandeling met water, 0.3399 gr. — 0.3247 gr. = 0.0152 gr. of 4.47 proc., voorloopig toe te schrijven aan vrijgekomen zuurstof. Met een enkel woord zij vermeld, dat de gasbelletjes zich vereenigen tot groote bellen, die van tijd tot tijd aan de oppervlakte der vloeistof ontsnappen; zoo ongeveer, als men dat waarneemt, alhoewel in mindere mate, bij de eerste phase der ontleding van het peroxy-zwavelzuur zilver en peroxy-salpeterzuur zilver. Na gestaan te hebben onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur; en natrium, dat aanvankelijk aan de lucht was blootgesteld onder een gewonen exsiccator), bleef het gewicht onveranderd. Er werd 3 c. c. water bij gedaan, met het doel, het zilverzout uit te trekken, waarvan het gewicht achtereenvolgens was:

	alles te zamen:
1 ^{ste} maal 0.0385 gr.	0.0385 gr.
2 0.0078	0.0463
3 0.0023	0.0486
4 0.0013	0.0499
5 0.0006	0.0505
6 0.0004	0.0509
7 0.0004	0.0513.

Toen de massa met water was uitgetrokken, bleef het *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$) terug, zij dit 0.2739 gr., dat met 0.0513 gr. de som uitmaakt van 0.2739 gr. + 0.0513 gr. = 0.3252 gr.; terwijl hetgeen terug bleef, na uittreden der „gemakkelijk vrijkomende zuurstof,” bedroeg 0.3247 gr., dus een verschil aanwijzende van 0.3252 gr. — 0.3247 gr. = 0.0005 gr..

De hoeveelheid vrijgekomen zuurstof bedraagt 0.0152 gr. en men zou de som kunnen nemen van 0.3252 gr. (zie boven) en 0.0152 gr., zijnde: 0.3252 gr. + 0.0152 gr. = 0.3404 gr.. Deze som nu moet gelijk wezen aan de hoeveelheid zwarte stof, die ter analyse werd genomen, dus aan 0.3399 gr.; zoodat zich het verschil voordoet van 0.3404 gr. — 0.3399 = 0.0005 gr., zooals dat, boven gegeven. In den grond is het namelijk volkomen hetzelfde, want de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” werd indirect bepaald (dat wil zeggen, door het verschil in gewicht te nemen vóór en na behandeling met water).

Omgekristalliseerd, werd achtereenvolgens gevonden :

		te zamen :
1 ^{ste} maal	0.0404 gr.	0.0404 gr.
2	0.0069	0.0473
3	0.0012	0.0485
4	0.0008	0.0493
5	0.0005	0.0498
6	0.0003	0.0501
7	0.0002	0.0503.

Er bleef terug 0.0014 gr., terwijl men heeft: 0.0503 gr. + 0.0014 gr. = 0.0517 gr. en 0.0517 gr. — 0.0513 gr. = 0.0004 gr. (zie een weinig vroeger met betrekking tot de waarde van 0.0513 gr.). De waarde van 0.0503 gr. geeft 14.79 proc. voor het zilverzout. Daar de som is van 14.79 + 4.47 = 19.26, blijft er over voor het zilverbioxyde: 100 — 19.26 = 80.74 proc., en de geheele samenstelling van het product van electrolyse is bijgevolg op 100 gew. d.

III

zilverbioxyde	80.74
zilverzout	14.79
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	
(en mogelijk ook water, enz. ¹⁾)	4.47
	100.

Een nieuwe reeks van Bereidingen. Bereiding N°. 24. Er werd een nieuwe hoeveelheid zilveroxyde gevoegd bij diegene, welke reeds dienst had gedaan. Men was daarenboven genoodzaakt, om 100 c. c. water te doen bij de oplossing, ten einde de vereischte hoeveelheid te hebben. *Bereiding N°. 25.* Ook thans werd versch zilveroxyde bijgedaan, en 50 c. c. water bij de oplossing. *Bereiding N°. 26.* Er werd noch zilveroxyde noch water toegevoegd. *Bereiding N°. 27.* Er werd versch zilveroxyde bijgedaan, en 50 c. c. water. *Bereiding N°. 28.* Geen zilveroxyde werd toegevoegd, maar wel 50 c. c. water.

¹⁾ Zie deze verhandeling, pag. 26, 28.

De volgende Tabel bevat de gegevens, zooals dit vroeger werd gedaan:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N° 24	3	0.0942 gr.	—	0.0851 gr.	0.0851 gr.	—
N° 25	4	0.0836	0.0851 gr.	0.0771	0.1622	—
N° 26	3	0.0868	0.1622	0.0781	0.2403	—
N° 27	3	0.0743	0.24	0.0658	0.3058	0.0003 gr.
N° 28	3	0.053	0.3054	0.0468	0.3522	0.0004

De concentratie was op den duur zeer gering geworden, en, bepaald na bereiding N°. 28, werd gevonden in 4 c. c. der oplossing van azijnzuur zilver, 0.01 gr. aan dit zout, dus 2.5 gr. in één liter (een bij ongeveer 20° verzadigde oplossing bevat ongeveer 10 gr. van dit zout in één liter). De kristalvorm beantwoordde nog steeds aan dit lichaam, dat bij gevolg niet is veranderd onder den invloed der electrolyse in die lange periode van vele weken, zijnde dag en nacht, alles te zamen genomen.

Er werd thans verhit met water. Het waterbad en de reageerbuis waren omgeven (en voortaan altijd) met een cylinder van plaatijzer, daartoe speciaal ingericht, namelijk met het doel, om alles zooveel mogelijk *af te sluiten van het licht*, voor zooverre dit op doelmatige wijze is te bereiken. Daarna geplaatst onder een vacuum-exsiccator bleef terug 0.3356 gr.. Aangezien de hoeveelheid aan zwarte stof bedroeg 0.3522 gr. + 0.0007 gr. = 0.3529 gr. is dus het verlies: 0.3529 gr. — 0.3356 gr. = 0.0173 gr. of 4.9 proc. (zie de voorloopige analyse in de voorgaande Verhandeling, zoomede de andere vroegere analyses).

Het terugblijvende, in hoeveelheid 0.3356 gr., werd achtereenvolgens uitgetrokken met 3 c. c. water bij gewone temperatuur, gevende:

te zamen:

1 ^{ste} maal	0.0393 gr.	0.0393 gr.
2	0.0104	0.0497
3	0.0016	0.0513
4	0.001	0.0523
5	0.0007	0.053
6	0.0004	0.0534
7	0.0003	0.0537.

Het terugblijvende bioxyde bedroeg 0.2823 gr.. Voor het bioxyde + zilverzout werd gevonden 0.3356 gr., en 0.0537 gr. voor het zout, zijnde de som $0.2823 \text{ gr.} + 0.0537 \text{ gr.} = 0.336 \text{ gr.}$, dus een verschil gevende van $0.336 \text{ gr.} - 0.3356 \text{ gr.} = 0.0004 \text{ gr.}$. Bij omkristallisatie der hoeveelheid 0.0537 gr. werd gevonden:

te zamen:

1 ^{ste} maal	0.0442 gr.	0.0442 gr.
2	0.0067	0.0509
3	0.0013	0.0522
4	0.0002	0.0524
5	0.0001	0.0525.

Er bleef terug 0.0015 gr., dus heeft men $0.0525 \text{ gr.} + 0.0015 \text{ gr.} = 0.054 \text{ gr.}$ en $0.054 \text{ gr.} - 0.0537 \text{ gr.} = 0.0003 \text{ gr.}$. De hoeveelheid 0.0525 gr. komt overeen met 14.87 proc. aan zilverzout; en bij gevolg is de samenstelling van IV:

	IV
zilverbioxyde	80.23 (indirect)
zilverzout	14.87
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof” enz. ¹⁾	4.9
	100.

Concentratie en opbrengst. Tot nog toe werd gewerkt met dezelfde oplossing, waarvan het gehalte al kleiner en kleiner werd. Thans wilde men werken met een versche oplossing van een bekende concentratie. *Bereiding N^o. 29.* De oplossing had lang gestaan met azijnzuur zilver in overmaat; dit geschiedde overigens in den winter. Alvorens de electrolyse plaats had, liet men den toestel twee dagen (dag en nacht) werken (slechts kon de elektrische stroom niet doorgaan). De electrolyse hield drie dagen aan (dag en nacht). Men volgde den gewonen weg, en het product werd gewassen in het kleine schaalkje enz.. De opbrengst bedroeg slechts 0.0186 gr., dus al zeer weinig, maar in overeenstemming met de uitkomsten der eerste Bereidingen (zie de voorgaande Verhandeling). Het zilveroxyde was meer samenhangend (wel als gevolg van azijnzuur zilver in de massa afgezet); en na de electrolyse was de oplossing iets meer zuur van reactie dan vroeger.

Een hoeveelheid van 2 c. c. na de electrolyse gaf na verdampen 0.015 gr. aan azijnzuur zilver, zij dit 7.55 gr. in een liter (zie boven).

¹⁾ Zie deze Verhandeling pag. 26, 28.

Concentratie en ontleding der oplossing. De vermindering in concentratie als gevolg der electrolyse (zie vroeger), schijnt vreemd en niet vatbaar voor een verklaring. Het azijnzuur toch, door electrolyse vrijgekomen, is bijkans onmiddellijk geneutraliseerd door zilveroxyde (dat trouwens wat koolzuur zilver bevat); men zou zeggen, en met recht, dat de concentratie slechts (genoegzaam) onmerkbaar zou moeten veranderen, aangezien alleen het afzetsel aan de *anode* daartoe aanleiding zou kunnen geven, en dit bedraagt zeer weinig. Neemt men evenwel aan, dat te gelijktijd een *tweede* reactie intreedt, b. v. bij wijze van een *parallele* reactie (zie later), onder destructie van azijnzuur (te weten, azijnzuur zilver), dan is er een verklaring van gegeven, wanneer namelijk tevens wordt aangenomen, dat deze tweede reactie het wint van de eerste, wat betreft de hoeveelheid, die wordt ontleed. Door deze tweede reactie is waarschijnlijk de vorming van afzetsel herleid tot een zóódanige hoeveelheid, dat de studie er van, meer of min wordt bemoeilijkt, zoo niet meer.

Bereiding N°. 30. Dezelfde weg werd gevolgd, alleen was de oplossing minder sterk, want er waren 250 c. c. water gedaan bij 750 c. c. der oplossing (zijnde deze laatste verzadigd). De opbrengst beantwoordde niet aan hetgeen wellicht zou kunnen verondersteld worden met 't oog op de uitkomsten vroeger verkregen, daar deze 0.0131 gr. niet te boven ging (dus nog minder bedroeg dan die van Bereiding N°. 29), dus zoo ongeveer het minimum vertegenwoordigt van al de Bereidingen tot nog toe. En toch waren de Volt's en Ampère's ongeveer hetzelfde gebleven (zooals trouwens in den regel het geval is met een thermo-electrische batterij); ook was er niets te bemerken van eenige wijziging in toestel, enz.. Dus is de gevolgtrekking, dat er waarschijnlijk nog een andere factor is (die de opbrengst regelt), dan die der concentratie, en dat deze andere factor niet onwaarschijnlijk is te zoeken *in deze of geene wijziging der electrolytische oplossing van het azijnzuur zilver*; en dat er tijd wordt vereischt, om die verandering te volbrengen.

Overzicht.

N ^o .	Dagen.	Gewicht horloge- glas.	Gewicht buisje.	Water bij- gedaan	Concentratie.	Zilveroxyde bijgedaan.	Aanmerkingen.	Maand.
5	3	0.011	0.008			22 gr. van 89 %	(koolz. zilver bevat 84 % $Ag_2 O$).	Febr. 1899.
7	3	0.013	0.0094					
8	2	0.0033	0.0022					Maart
9	6	0.0111	0.0082					
10	3	0.0241	0.021			10	klein schaalteje.	April
11	3	0.0383	0.0343			10		
12	3	0.0327	0.0298			11		
13	3	0.0294	0.0249			10		Mei
14	3	0.0381	0.0352			10		
15	3	0.0304	0.0275		7.15 gr. in 1 L.	10		
16	3	0.0653	0.0597			10		
17	3	0.0519	0.0468			22 van 84 % ongeveer.		Juli
18	3	0.0843	0.0774					
19	3	0.1102	0.1031	20 cc.				
20	3	0.0843	0.075	20				
21	3	0.155	0.146	—	5	11 gr. van 84 % ongeveer.		Oct.
22	3	0.104	0.0927	40		8		Nov.
23	3	0.1137	0.1012	90				
24	3	0.0942	0.0851	100		8		Dec.
25	4	0.0836	0.0771	50				
26	3	0.0868	0.0781	—		5		
27	3	0.0743	0.0658	50		5		Jan. 1900.
28	3	0.053	0.0468	50				

*Naar aanleiding der vraag, betreffende de aanwezigheid of afwezigheid van kristalwater (of constitutiewater, of $O H$). Ten einde dit vraagstuk te kunnen oplossen, zou een dusdanige hoeveelheid aan zwarte stof worden vereischt, als voor 't oogenblik niet zou te bereiken zijn, of ten koste van een zeer langdurigen en te opofferenden arbeid. En dan zou het nog kunnen wezen, dat eenige onzuiverheid de uitkomst minstens twijfelachtig maakt. In aanmerking genomen, dat de kans gering is voor de aanwezigheid van water, namelijk onder den vorm van *kristalwater*, en dat, met 't oog op de analyses van peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver, die er toe leiden aan te nemen, dat geen water voorkomt in deze verbindingen. Maar in het geval, dat ons bezighoudt, zou water de rol kunnen vervullen van *constitutiewater*; of er zou *hydroxyl* ($O H$) kunnen ingebracht zijn bij wijze van oxydatie. In het laatste geval zou men te doen hebben met de vorming van een zuur, namelijk afgeleid van azijnzuur (te weten, van azijnzuur zilver.) Het is onmogelijk, thans op die quaesties*

in te gaan, in de eerste plaats met 't oog op de geringe hoeveelheid stof, die ter beschikking is.

Gekristalliseerd of amorph. Het lichaam, voorloopig aangegeven met den naam van peroxy-azijnzuur zilver, doet zich onder den microscoop voor als amorph. Maar toch verkrijgt men den indruk, dat hier en daar in de massa meer of min scherpe kanten zijn, en ziet men bij eenige Bereidingen tevens sommige gliusterende punten. In aanmerking genomen de structuur, die de zwarte stof schijnt te hebben, en dat wel vooral in verband met onze kennis betreffende peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver, is de kans zeer groot, dat het lichaam is gekristalliseerd, en wel op genoegzaam duidelijke wijze, verondersteld, dat de verbinding voldoende zuiver is. De opbrengst is tot nog toe, zooals bekend, betrekkelijk zeer beperkt, en dat na een electrolyse van eenige dagen; zoodat de omstandigheden niet gunstig zijn voor de vorming van kristallen, die voor 't oog waarneembaar zijn (zij dit onder den microscoop). Wellicht herinnert men zich, dat bij electrolyse van zwavelzuur zilver eerst een doffe zwarte stof werd verkregen, die er ook uitzag als te zijn amorph, en dat zelfs onder den microscoop; maar later, toen de opbrengst grooter was geworden, en de omstandigheden ter vorming der zwarte stof blijkbaar beter, deed het lichaam zich weldra voor als gekristalliseerd en glanzend.

Analyse van zilverbioxyde, als ontledingsproduct van peroxy-azijnzuur zilver. Er werd uitgegaan van het bioxyde, dat was verkregen als overblijfsel (na behandeling met water onder verwarming) van de som der Bereidingen N°. 24, 25, 26, 27 en 28 (als IV aangegeven), en men ontleedde dit met verdund *salpeterzuur*; en van het terugblijvende van de som der Bereidingen N°. 21, 22 en 23 (zij dit III, zie later), dit ontledende met verdund *azijnzuur*. *Analyse van residu IV, met verdund salpeterzuur.* Dit werd gedaan in een reageerbuisje, en wel in hetzelfde buisje, waarin de oorspronkelijke stof was behandeld met water (onder verwarming), bevattende 0.2823 gr. aan residu (zie vroeger). Hierbij werden 3 c. c. water gedaan, en in een waterbad verhit bij 60° — 70°, terwijl er nu en dan een weinig verdund salpeterzuur werd toegevoegd, tot alles was opgelost, onder vrijkomen van gas. De buis werd vervolgens geplaatst onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en ongebluschte kalk). Er werd verkregen 0.3862 gr. salpeterzuur zilver of 0.2634 gr. zilveroxyde ($Ag_2 O$). Dit geeft aan zuurstof:

0.2823 gr. — 0.2634 gr. = 0.0189 gr. of 6.69 proc., en bijgevolg heeft men:

$$Ag_2 O_2 = Ag_2 O + O \text{ vordert:}$$

gevonden:		
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	6.69	6.46
zilveroxyde	93.31	93.54
	<hr/> 100.	<hr/> 100.

Analyse van residu III (van *Bereid. N°. 21, 22 en 23*) met verdund azijnzuur. Het doel hiervan was, den invloed der zuurstof in statu nascendi te kennen op azijnzuur zilver (zie over dit onderwerp later). Er werd uitgegaan van 0.2739 gr. residu, zich bevindende in een reageerbuisje (zie vroeger over de analyse van III). Er werd nu en dan water bij gedaan tot dit bedroeg 18 c. c. en bijkans tegelijkertijd verdund azijnzuur (van een sterkte van 1 c. c. zuur op 10 c. c. water), zijnde 12 c. c.. Eerst werd verhit in een waterbad bij 60° — 70°, vervolgens bij 70° — 80°, om te eindigen bij 80° — 90°, tot ieder spoor van zwarte stof was verdwenen (de bewerking geschiedde buiten den invloed van licht, zooveel mogelijk). Dit alles vorderde heel wat tijd (namelijk eenige dagen), vooral als gevolg der beperkte oplosbaarheid van azijnzuur zilver. Ten slotte geplaatst onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en ongebluschte kalk), bleef terug 0.3802 gr. van het zilver-zout, dat te veel zilveroxyde ($Ag_2 O$) geeft, en te weinig „gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, namelijk 3.61 p. c.. Het gebruik van salpeterzuur schijnt de voorkeur te hebben. Deze uitkomst zou een verklaring vinden in de vorming van een zilverzout, als afgeleide van dat van azijnzuur (als gevolg van oxydatie) met een grooter mol. gew.. Maar dit is nader te vervolgen.

Methode gevolgd ter analyse van het product van electrolyse. In hoofdzaak werd dezelfde weg gevolgd, als bij analyse van peroxy-zwavelzuur zilver. Ook liet de hoeveelheid stof, waarover was te beschikken, en die zeer gering was, geen keuze dan die eener methode, welke betrekkelijk weinig stof vordert. Zoo werd de te onderzoeken stof behandeld met water onder verwarming in een waterbad (terwijl de stof zich bevond in een reageerbuisje (geheel op de wijze, zooals dit vroeger uitvoerig werd beschreven). Het buisje werd later geplaatst onder een vacuum-exsiccator. Het verschil in gewicht kan doen kennen de som van zuurstof + water enz., die zijn vrijgekomen.

De geringe hoeveelheid stof laat niet toe tot heden, het water te bepalen op directe wijze, dat namelijk *kan* voorhanden zijn.

Het terugblijvende met water uitgetrokken bij gewone temperatuur, wordt afgeschonken (dus niet gefiltreerd), enz., terwijl de oplossing bij indamping *het zilverzout* geeft, dat het aanvankelijke zout zou kunnen zijn ($CH_3 \cdot CO \cdot O \cdot Ag$), of een afgeleide van dit zout, b. v. glucolzuur zilver ($CH_2 \cdot OH \cdot CO \cdot O \cdot Ag$), enz., dat nog is na te gaan.

Samenstelling van het product van electrolyse van azijnzuur zilver, naar de verschillende analyses daarvan gedaan. Er komen gevallen voor, waarin het niet wel mogelijk is, de samenstelling van een verbinding op eenmaal te leeren kennen, maar slechts geleidelijk, en zulk een geval doet zich thans voor. Want, door gebrek aan een voldoende hoeveelheid stof, was men genoodzaakt, zich aanvankelijk te houden aan hetgeen bepaald vereischt werd met 't oog op de eerste gegevens voor zooverre betreft meer de globale samenstelling, om het zoo uit te drukken, van het electrolytische product. Zooals men reeds vroeger deed opmerken, was men genoodzaakt, eenige Bereidingen samen te nemen, teneinde een hoeveelheid stof te hebben zoo ongeveer vereischt voor een tamelijk goede analyse. En zoo is de analyse gedaan van de som der Bereidingen:

I ¹⁾ N°. 13, 14, 15 en 16, gevende 0.1473 gr. stof.

II ²⁾ N°. 17, 18, 19 en 20, opleverende 0.3023 gr. aan stof.

III ³⁾ N°. 21, 22, en 23, zijnde 0.3399 gr. stof.

IV ⁴⁾ N°. 24, 25, 26, 27 en 28, bedragende 0.3529 gr. der verbinding.

Iedere bereiding vordert alles zamen genomen, zoo ongeveer één week, dat dus voor iedere reeks van Bereidingen, namelijk van I, II, III en IV, achtereenvolgens geeft 4, 4, 3 en 5 weken. De analytische uitkomsten van eenige beteekenis zijn hieronder medegedeeld:

¹⁾ Zie deze Verhandeling pag. 5;

²⁾ l. c. pag. 11;

³⁾ l. c. pag. 11;

⁴⁾ l. c. pag. 17.

	I	III	IV
zilverbioxyde	76.31	80.74	80.23 (indirect)
zilverzout	19.86	14.79	14.87
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, (mogelijk te- vens water enz. ¹⁾	3.8	4.47	4.9
	100.	100.	100.

Het bioxyde werd bepaald langs indirecten weg. Er is voldoende aanleiding, om te veronderstellen, dat bij II (zie vroeger) te veel water werd gebruikt tot wasschen; en met betrekking tot I zou, onder anderen, kunnen worden opgemerkt, dat de hoeveelheid stof te beperkt was (zie boven en vroeger). Naar de theorie eischt:



zilverbioxyde	78.89	77.59
zilverzout	17.71	17.49
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	3.4	5.00
	100.	100.

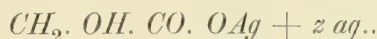
In verband met het boven opgemerkte, kan men III en IV beschouwen als betrekkelijk de meeste waarde te bezitten. Wat als „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” is gegeven, zou ten deele „water” kunnen wezen, zoo kristalwater, het verdampen toch (na de behandeling met water) geschiedde bij gewone temperatuur, en constitutie-water is bijgevolg zoo goed als buitengesloten. De naam van *zilverzout* werd gegeven aan het in water opgeloste, bij behandeling van het residu met water en indampen der oplossing. Dit wil zeggen, dat het zout nog niet op voldoende wijze is gedetermineerd, daar men geen genoegzame hoeveelheid stof ter beschikking had tot het doen der vereischte analyses. Het zout is oplosbaar in water, en derhalve is zuringzuur zilver enz. buitengesloten. maar het zou kunnen zijn $CH_2. OH. CO. OAg$ of $CH. 2 OH. CO. OAg$, om niet te gewagen van andere afgeleiden van azijnzuur zilver ($CH_3. CO. OAg$), die volgens de theorie zouden kunnen ontstaan, zoo bij de electrolyse. Die laatste zouten zouden *kristalwater* kunnen bevatten, niet het geval zooals bekend met azijnzuur zilver.

¹⁾ Zie pag. 26, 28.

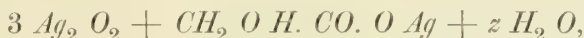
Stel eens, dat men had te doen met glucolzuur zilver $CH_2. OH. CO. OAg$, dan zou de oorspronkelijke verbinding kunnen wezen:



en (na gedeeltelijke ontleding) het zilverzout met water uitgetrokken:



Dit laatste is aanvankelijk vermengd met zilverbioxyde, zoodat men na behandeling met water onder verwarming, enz., heeft te maken met:



namelijk in het geval, dat werd verondersteld. Het verschil in gewicht van de zwarte stof vóór ontleding, onder den invloed van water (bij verwarming), en later, laat zich bijgevolg uitdrukken op deze wijze:

$$\begin{array}{l} \text{vóór: } 3 Ag_2 O_2. + CH_2. O H. CO. O Ag. x O + y H_2 O \\ \text{na: } 3 Ag_2 O_2. + CH_2. O H. CO. O Ag \quad \quad + z H_2 O \\ \text{verschil:} \quad \quad \quad x O + y H_2 O - z H_2 O. \end{array}$$

Ingeval is: $y = z$, dan heeft men als verschil alleen zuurstof, dus $x O$. Is: $y = z = 0$, dan is het nog aldus. Maar is alleen $z = 0$, dan heeft men als verschil: $x O + y H_2 O$.

Met 't oog op de analyses van het product van electrolyse, zou men geneigd kunnen zijn te schrijven b. v:



$3 Ag_2 O_2. H_3. CO. O Ag. 2 O + H_2 O$ (altijd verondersteld, dat azijnzuur zilver blijft, en dus niet wordt omgezet). Dit is na te gaan door een directe bepaling van *water*, en een elementair-analyse van het oorspronkelijke product, zoomede door een directe bepaling van *zuurstof*. ¹⁾ Daarenboven moet een uitgewerkte analyse worden gedaan van het zilverzout (met water uitgetrokken).

Ten einde (voor zooverre thans betreft) de verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen, tot één geheel te maken, moet daaraan

¹⁾ Zie pag. 26, 28.

nog worden toegevoegd, dat *de oorspronkelijke stof* wel eens niet zou kunnen beantwoorden aan het zout met water uitgetrokken. *De oorspronkelijke stof* zou b.v. kunnen zijn: $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot O Ag \cdot x O$, en na (gedeeltelijke ontleding en) uittrekken met water een ander zout geven, b.v. $CH_2 \cdot OH \cdot CO \cdot O Ag$, als gevolg van oxydatie. Vele complicaties kunnen bijgevolg optreden. Wat aangaat het zilverzout, *dat in oplossing blijft*, na zeer vele electrolysen met een en dezelfde oplossing, schijnt dit wel azijnzuur zilver te zijn, te oordeelen op 't oog naar den kristalvorm; ook wordt de oplossing niet zwart bij lang koken.

Uit een algemeen oogpunt beschouwd, bedraagt het aantal mogelijke gevallen een drietal, en wel, het azijnzuur zilver der electrolytische oplossing ondergaat een verandering:

1° *alvorens* het zwarte lichaam optreedt, waarvan sprake is;

2° *gedurende* het ontstaan dezer verbinding; of

3° tijdens het elimineeren der „gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, dus dan betrekking hebbende op een ontleding der zwarte stof *na* haar ontstaan, en op de samenstelling van het zilverzout, door water uitgetrokken. En bijgevolg is het mogelijk, dat in deze phase niet alleen water wordt gevormd, maar ook kooldioxyde (CO_2) en koolmonoxyde (CO). Het verschil in gewicht (voor en na behandeling met water) zou in dat geval een andere beteekenis hebben.

4° Een zamentreffen van geval 1°, 2° en 3° is niet buitengesloten, en bijgevolg niet buitengesloten een verwickeling, die vrij bezwaarlijk zou te ontwarren zijn, en wel vooral met een betrekkelijk geringe hoeveelheid stof.

Azijnzuur zilver en $H_2 O_2$. Deze lichamen schijnen niet te reageeren in waterige oplossing, dat tevens geldt met betrekking tot zwavelzuur zilver.

Structuurformule nader beschouwd. De gegevens, waarover men thans beschikt, gedoogen nog niet, om zich uit te laten over de structuur van de electrolytische verbinding, waarvan sprake is (zie vroeger). Met 't oog op eenige beschouwingen van theoretischen aard, zal voor 't oogenblik worden aangenomen, dat dit lichaam is te beschouwen als zijnde: $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot O Ag \cdot 2 O$, er overigens bijvoegende, dat nog niet bekend is, of het met water afgescheiden zout is een onzettingsproduct of niet; en evenmin, of kristalwater aanwezig is of niet (of constitutiewater); en wat betreft het gehalte aan gemakkelijk vrijkomende zuurstof, dat dit $3 O$ zou kunnen zijn en zelfs $1 O$

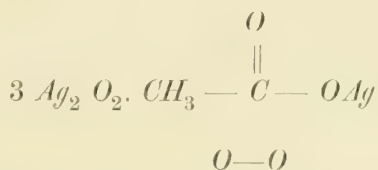
(inplaats van 2 O). Anders gezegd, men is nog niet genoegzaam op de hoogte van het lichaam, dat in behandeling is; zelfs niet van den coëfficiënt van $Ag_2 O_2$. Maar dit neemt niet weg, dat in den grond de *geaardheid* der verbinding betrekkelijk vaststaat. En met 't oog op eenige theoretische beschouwingen, zal voorloopig worden aangenomen, zooals gezegd, de formule:



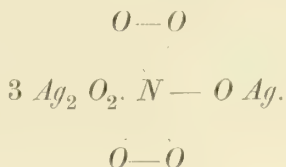
die bijgevolg analogie zou aanbieden met de formule van peroxy-salpeterzuur zilver, zijnde deze:



terwijl beiden *moleculaire* verbindingen zijn van zilverbioxyde met een *oxy*-zout van zilver. Volgt men in hoofdzaak dezelfde wijze van redenceren als die, vroeger in acht genomen (zie de Verhandelingen loopende over peroxy-salpeterzuur en peroxy-zwavelzuur zilver met betrekking tot die gedeelten), dan wordt men geleid tot de affiniteitsformule (nogmaals zij herhaald, dat het azijnzuur een *ander* zuur zou kunnen wezen, maar dan waarschijnlijk wel zoo ongeveer overeenkomstig geconstitueerd; hier is meer 't oog gevestigd op den rest CO):

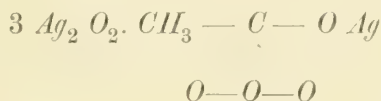


, terwijl die van peroxy-salpeterzuur zilver is:

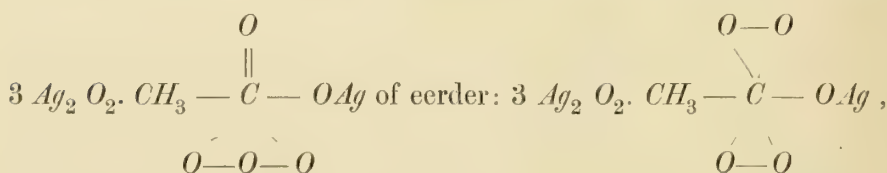


Het atoom koolstof zou zich dan onder een eenigzins nieuwen vorm voor doen, namelijk als: *hexavalent*: C^{VI} .

Trouwens zou men kunnen veronderstellen, dat koolstof tetravalent is, door als formule aan te nemen:



maar de stabiliteit van een dergelijke verbinding is zeker geringer dan die der twee andere overeenkomstige verbindingen, waarvan de stabiliteit ongeveer eenzelfde is. En daarvan (namelijk, van een mindere stabiliteit) is niets gebleken (zie vroeger, hoe geringe hoeveelheden stof werden opgehoopt, dat vrij wat tijd vorderde, eenige weken, zonder eenig bezwaar op te leveren). Ingeval mocht worden verondersteld, dat de formule is: $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot OAg \cdot 3 O$, zou men genoodzaakt kunnen worden, de volgende formule aan te nemen:



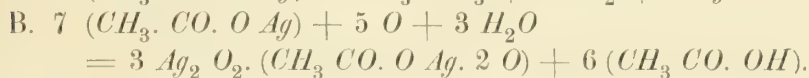
maar dan is de kans tamelijk groot, dat 1 O onder een anderen vorm aanwezig is, b.v. onder dien van $H_2 O$, of HO . De „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” is blijkbaar gebonden aan den rest CO , en niet aan den rest CH_3 (te weten dat deel der zuurstof, hetgeen vrijkomt als *gas*), want in dit geval zouden resten OH gevormd worden. Zooals men reeds deed opmerken (zie pag. 26 en 28), verkrijgt het verschil in gewicht vóór en na behandeling met water een andere beteekenis, in geval er b.v. CO_2 of CO ontstaat; en bijgevolg heeft dit invloed op de aan te nemen formule. B.v., in geval der vorming van kooldioxyde, zou 3 O te hoog kunnen zijn, daar CO_2 slechts O_2 bevat.

Over het mechanisme der electrolyse eener waterige oplossing van azijnzuur zilver. ¹⁾ Het is vrij waarschijnlijk, dat bij deze electrolyse ook plaats heeft de reactie van Kolbe, namelijk een gedeeltelijke oxydatie van azijnzuur zilver, of ter meer eenvoudige voorstelling, van azijnzuur (ter vorming van aethan en kooldioxyde, zooals dit geschiedt bij electrolyse eener waterige oplossing van kaliumacetaat). Dit volgt (alhoewel meer of min op indirecte wijze) uit de betrekkelijk groote verandering in concentratie der oplossing, aan electrolyse onderworpen, en dat, niettegenstaande het zuur, dat vrij komt (als gevolg der electrolyse), bij voortdurende wordt geneutraliseerd; terwijl de invloed van de zeer geringe hoeveelheid aan zwarte stof bij electrolyse, nauwelijks een merkbaaren invloed

²⁾ Zie over de electrolyse van azijnzuur, een opgave van litteratuur: *Z. f. Phys. Ch.* Bd. 32. S. 108 (1900).

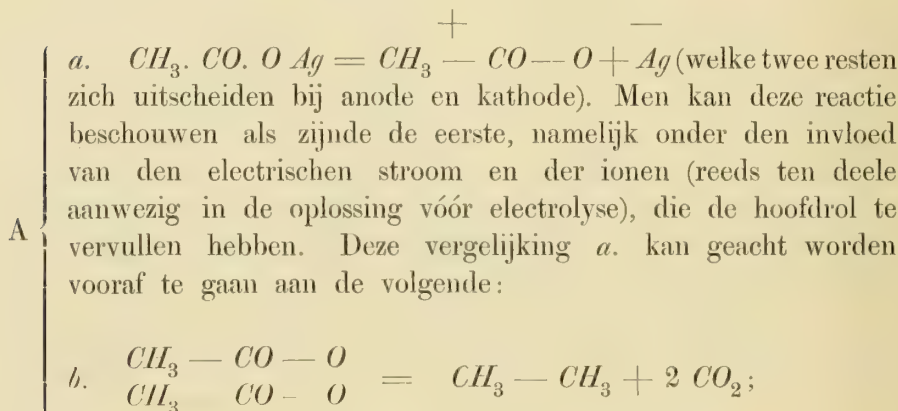
kan uitoefenen, en de toestand der oplossing nagenoeg die is bij de grens, van te worden gevormd of niet (namelijk onder deze omstandigheden van electrolyse). Het voornemen bestaat wel, om later een studie te maken van gemelde reactie, die tegelijkertijd intreedt; maar, daar deze een speciale inrichting vordert, scheen het beter, in ieder geval voorloopig, het hoofddoel te vervolgen, alvorens een andere richting van het onderwerp in te slaan. Men overtuigde er zich overigens van, dat de oplossing, aan electrolyse onderworpen, en die reeds lang had gediend (en waarbij de concentratie ongeveer was verminderd tot de helft) alleen azijnzuur zilver bevatte (trouwens werd hierbij vooral afgegaan op de wijze van kristalliseeren, op 't oog, door een deel der oplossing te laten verdampen). Men zou hieruit het besluit kunnen trekken, dat er bij gevolg hoegenaamd geen oxydatie intreedt van azijnzuur zilver onder vorming van een ander zuur (namelijk van het zilverzout er van), maar zulk een besluit zou voorbarig zijn. Wat betreft een geoxydeerd worden in den zin der reactie van Kolbe, met vorming van aethan ($CH_3 \cdot CH_3$) en kooldioxyde (CO_2), dit zou een verklaring geven van het feit, dat bij electrolyse eener waterige oplossing van zilveracetaat zóó weinig ontstaat van het zwarte product van electrolyse, dat dit eerder schijnt te naderen tot nul; want een opbrengst van 0.1 gr. (en dit is betrekkelijk nog veel), en dat in 3×24 uur, zou de moeite wel niet loonen, indien het lichaam, waarvan sprake is, niet zooveel belangstelling vorderde. Men begrijpt, dat de betrekkelijk nog al beperkte oplosbaarheid van azijnzuur zilver (zoo ongeveer 10 gr. per liter) daarbij niet nalaat haren invloed te doen gelden; het overigens daar latende, in welken zin de graad van concentratie zou werken. Wat aangaat den invloed, dien de aanwezigheid van vrij azijnzuur zou kunnen hebben, zoo voegen we, aan het vroeger medegedeelde, nog toe, dat de electrolytische oplossing op een dusdanige wijze werd geneutraliseerd (in de laatste bereidingen), dat vrij azijnzuur daarbij wel geen rol vervult van eenige beteekenis, want de oplossing is tegelijkertijd (zeer zwak) zuur en alkalisch.

Voor zooverre onze kennis thans reikt, is er reden, om aan te nemen, het zamengaan van twee, meer of min, parallelle reacties (die bij gevolg genoegzaam te gelijk plaats hebben), door de volgende vergelijkingen terug te geven:



Voor alle duidelijkheid zeggen we nogmaals, dat de coëfficiënten (namelijk die van: x , y en z) hoegenaamd niet vaststaan in de formule $x \text{ Ag}_2 \text{ O}_2$, $y (\text{CH}_3 \text{ CO. O Ag. } z \text{ O})$, dat evenwel niet buitensluit, dat men zich een betrekkelijk goed denkbeeld kan maken van de structuur van het zwarte lichaam door electrolyse verkregen, en der reacties, die met de vorming er van gepaard gaan (mogelijk is b. v., dat in plaats van oxy-azijnzuur zilver, aanwezig is een zilverzout van een ander oxy-zuur, als afgeleide van het azijnzuur).

De vergelijkingen A en B zijn overigens sommaire vergelijkingen, en wat betreft A, deze laat zich aldus splitsen:



zonder zich overigens uitvoerig in te laten over andere reacties, als overgangsreacties (zie overigens later). Zoo kan, om een voorbeeld te nemen, reactie b . worden voorafgegaan door de vorming van een molecuul der structuur:

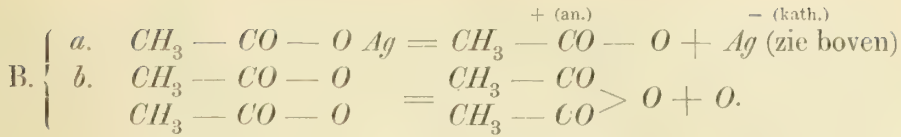


Aan een peroxyde van acetyl ¹⁾ is gegeven de formule:

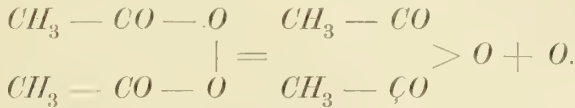
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 - \text{CO} \\ \text{CH}_3 - \text{CO} \end{array} > \text{O}=\text{O}$, in welk geval het atoom koolstof is aangenomen als C^{IV} . Wat reactie B betreft, zou men evenzoo als primaire reëactie kunnen beschouwen:

$\text{CH}_3 - \text{CO} - \text{O Ag} = \text{CH}_3 - \text{CO}^+ - \text{O} + \text{Ag}^-$, en de sommaire reacties A en B zouden dan deze gedeeltelijke reactie gemeen hebben. Men heeft achtereenvolgens voor B, zijnde een sommaire reactie:

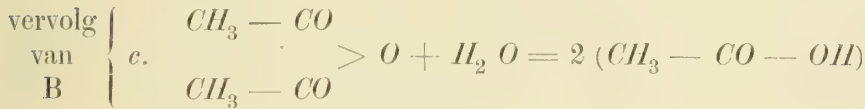
¹⁾ Zie: J. Chem. Soc. Vol. 75 en 76, pag. 715, July 1899.



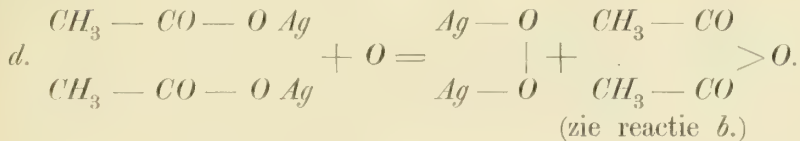
Mogelijk is, dat eerst ontstaat: $CH_3 - CO - O$
(zie vroeger), aldus te ontleden: $CH_3 - CO - \overset{|}{O}$



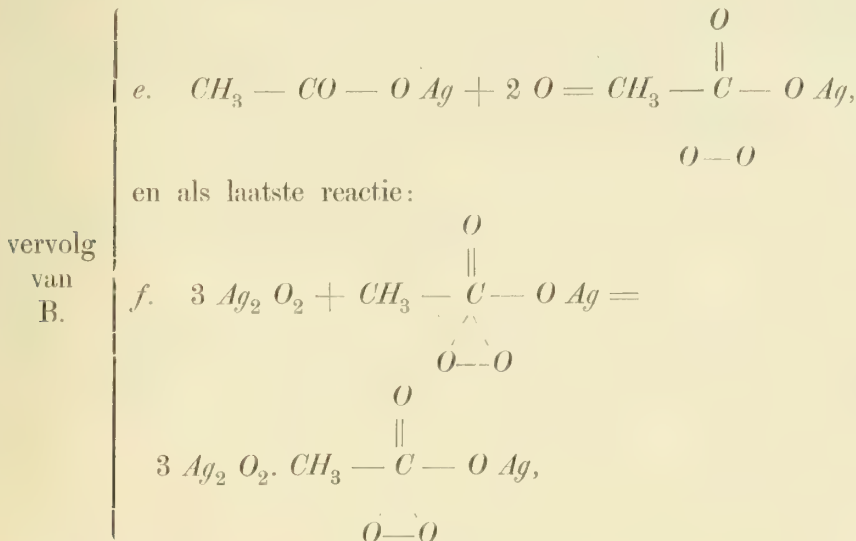
Reactie *b.* wordt opgevolgd door deze:



, dus van nature zeer eenvoudig, niet het geval met de volgende reactie:

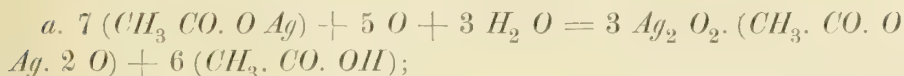


Men heeft daarenboven:

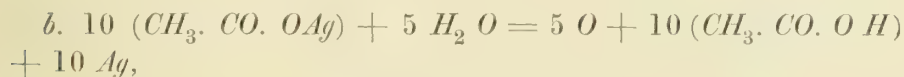


²⁾ " " " " " " " " " " " " N^o. 1 " 33 "

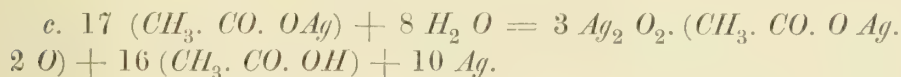
en als oxy-zuur); niet echter b.v. een oxy-koolzuur. Maar dit is alles meer van ondergeschikte beteekenis. Laten we liever duidelijkheids-halve de vergelijking doen volgen van het ontstaan ¹⁾ der zwarte stof, die trouwens, zooals gezegd, en gemakkelijk is te begrijpen, dezelfde is als boven gegeven, en slechts in omgekeerden zin te schrijven:



waaruit blijkt, dat één molecuul der zwarte stof zou vereischen, (te weten in het geval verondersteld) niet minder dan 6 moleculen zuur, om te ontstaan. Het is goed, te doen uitkomen, dat, om 5 O te hebben aan de anode, een ontleding wordt gevorderd van 10 ($CH_3 \cdot CO. O Ag$), of van 10 moleculen azijnzuur zilver, met een gelijktijdig afzetten van 10 Ag (aan de kathode), zooals kan blijken uit de volgende vergelijking:



gevende met vergelijking *a.* (zie boven):



Om vergelijking *c.* te hebben, behoeft men noodwendig alleen de waarde van 5 O af te zonderen uit vergelijking *b.*, en deze in vergelijking *a* te substitueeren.

Alle „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” kan geacht worden afkomstig te zijn van azijnzuur zilver ($CH_3 \cdot CO. O Ag$), namelijk van den rest *OAg* der electrolytische oplossing, zooals dit volgt uit vergelijking *b.*, en meer nog uit *B.b.* en *B.a.*.

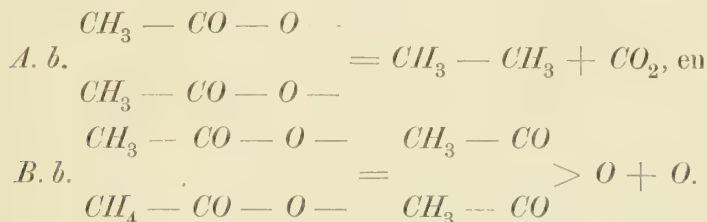
Het besluit is bijgevolg, dat ter vorming van 1 mol. peroxy-azijnzuur zilver, zij dit: $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO. O Ag. 2 O$, niet minder dan 16 mol. vrij zuur ontstaan, dus een betrekkelijk zeer groote hoeveelheid. Het is duidelijk, dat zich een overeenkomstig geval voordoet met het zwarte product der electrolyse van *salpeterzuur zilver* en *zwavelzuur zilver*. En hetzelfde geldt tevens van het evenwicht,

¹⁾ Zie Verhand. d. K. A. v. W. te Amsterdam (Eerste Sectie) Deel III N^o 8. pag. 37. Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (Afd. Letterk.) Dl. III.

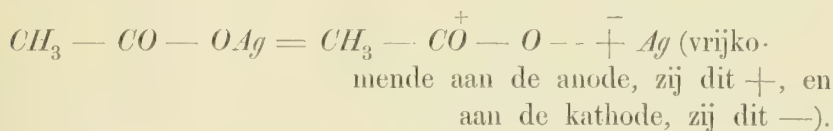
dat bestaat (tenminste onder de omstandigheden der electrolyse, daaronder bijgevolg ook begrepen de stroom) tusschen 16 ($CH_3 \cdot CO \cdot OH$) en 1 mol. van het $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot OAg \cdot 2 O$ (wat deze voorloopig aangenomen formule aangaat; zie boven). Men zou kunnen veronderstellen, dat deze hoeveelheid van 16 mol. vrij zuur nog geenszins de grens, eigenlijk gezegd, aangeeft, en, dat deze nog overschreden kan worden. Maar, hoe dit ook zij, buiten deze, zal de grens-hoeveelheid voor *vrij* zuur wel niet ver verwijderd zijn, of ontleding heeft plaats (hetwelk beteekent, dat de reactie den weg volgt, omgekeerd aan dien der vorming), terwijl dezelfde lichamen worden gevormd, die bij den aanvang juist aanleiding gaven tot het ontstaan van het zwarte lichaam bij electrolyse (zie boven, wat aangaat de Vergelijkingen dienaangaande). Het is duidelijk, dat in de soort van proeven, die ons thans bezighoudt, de hoeveelheid aan vrij zuur (b.v. genomen in gr. mol. in 1 liter der oplossing) betrekkelijk geringer is dan bij de electrolyse van zwavelzuur zilver, waar gebruikt werd gemaakt ter neutralisatie van *koolzuur zilver*, thans van *zilveroxyde* ($Ag_2 O$), en dat wel gedurende de electrolyse. Maar er heeft hier waarschijnlijk een complicatie plaats (zie pag. 30), als gevolg eener reactie, die tegelijkertijd schijnt in te treden, wellicht minder als secundaire reactie, maar meer als *parallelle*, en dat met de reactie, die het hoofddoel vormt onzer studie. Men heeft hier op 't oog de reactie van KOLBE, en tot grondslag bedient men zich van de uitgebreide electrolytische studiën van het kaliumzout van *azijnzuur*, en andere overeenkomstige zuren. Maar, voor zooverre ons bekend, heeft men zich hoegenaamd niet ingelaten met *zilver*-zouten van organische zuren, en dat met reden; en de studie in deze Verhandeling schijnt de eerste stap te zijn in die richting. Daarenboven zou men zich meer of min kunnen verhalen op de betrekkelijk groote hoeveelheid gas, die vrij komt gedurende de electrolyse, en de geringe opbrengst aan zwarte stof.

Uitgaande van de reacties *A* en *B*, zou de vraag kunnen gesteld worden, of deze twee van elkander afhangen, zij dit meer op indirecte wijze, zooals de uitdrukking „parallel” wel schijnt aan te duiden; en dit aangenomen zijnde, doet zich de vraag voor, in welken zin en graad, reactie *A* dan afhangt van *B* en omgekeerd. Maar het gezegde sluit niet buiten, dat reactie *A* veeleer is een *secundaire* reactie (betrekking hebbende op de aethan-vorming), wellicht als gevolg der ontleding van een deel van peroxy-azijnzuur zilver. Dit alles vereischt studiën van een ernstigen aard, en de studie thans aangeboden, is, om het zoo uit te drukken, slechts een inleiding

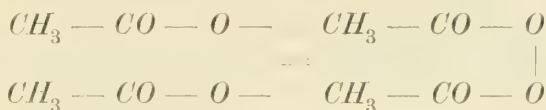
tot meer. De sommaire reactie A en B hebben gemeen a . (zoowel a . van A als van B ; zie pag. 30 en 31), en dan zouden volgen (namelijk volgens de reacties, in vergelijkingen gegeven) $A.b$ en $B.b$, zijnde deze (zie vroeger):



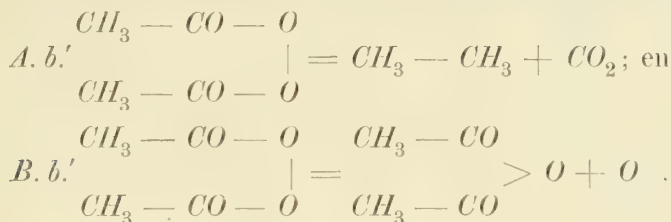
De reactie, die A . en B . gemeen hebben (namelijk $A. a$ en $B. a$), is (zie vroeger):



En alvorens de reacties *A. b.* en *B. b.* intreden, zou zich een intermediaire reactie kunnen voordoen (zie evenzoo vroeger):



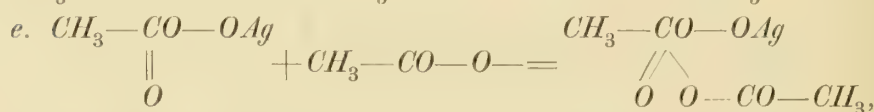
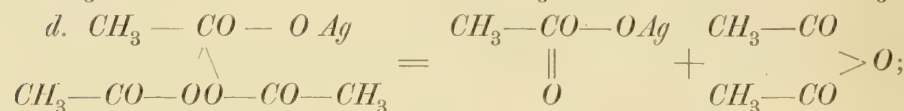
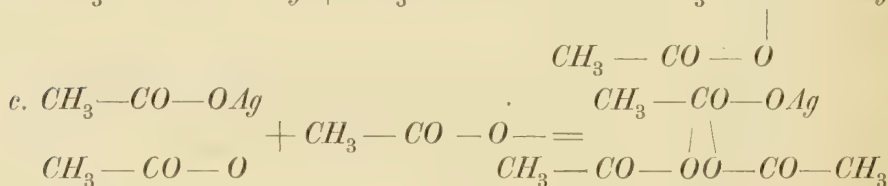
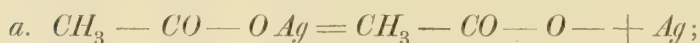
, dat zoo goed als zeker een zeer weinig stabiel lichaam is. En in geval van ontleding, geschiedt deze waarschijnlijk aldus (zie vroeger):



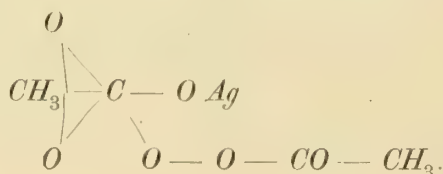
Mogelijk vordert het systeem van evenwicht, het samengaan dezer twee reacties, of, dat in hoofdzaak hetzelfde is, dat der reacties $A.b$ en $B.b$ (zie pag. 30 en 31), wier quantitative verhouding zou kunnen veranderen met de concentratie, temperatuur, enz.. Op den eersten indruk, zou men geneigd kunnen zijn, aan reactie $B. b$ (of $B. b'$) meer kans te geven, dan aan die van $A. b$ (of $A. b'$), daar de laatste reactie betrekkelijk samengestelder is. Toch schijnt

de ervaring te leeren, namelijk voor zooverre dit tot dusverre het geval vermag te zijn (nader onderzoek is noodwendig noodig), dat reactie *B. b* (*B. b'*) in geringere mate intreedt, en wel, te oordeelen naar de proef, naarmate de *concentratie* der oplossing grooter is, te weten gedurende de electrolyse. Trouwens is de oplosbaarheid zeer begrensd (zie vroeger), en sterk sprekende uitkomsten zijn niet te verwachten. In ieder geval is het op te lossen vraagstuk betrekkelijk samengesteld, namelijk het systeem in zijn geheel genomen, met inbegrip van den electrischen stroom. En slechts na herhaalde proeven en verschillende wijzigingen in de wijze van bereiding, bestaat er kans, om het noodige licht op dit vraagstuk te doen vallen.

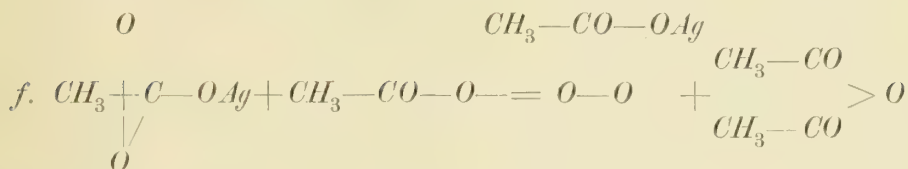
Overgangsreacties. De gegeven vergelijkingen b. v. die, geplaatst onder B (zie pag. 31), vertegenwoordigen blijkbaar slechts een deel der bestaande reacties; en hetzelfde kan gezegd worden van de overeenkomstige vergelijkingen vroeger medegedeeld, toen er sprake was van de vorming van peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver. Veeleer zou men zich kunnen voorstellen, dat zich overgangsreacties voordoen, b. v. die hier beneden opgegeven, in geval der vorming van *oxy-azijnzuur zilver* (zijnde *C*, *C^v* en *C^{vi}*):



of veeleer *C^v* (in plaats van *C^{vi}*), als minimum in dit geval, zij dan de formule:

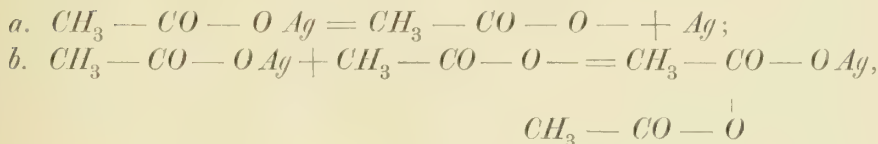


gevolgd door:

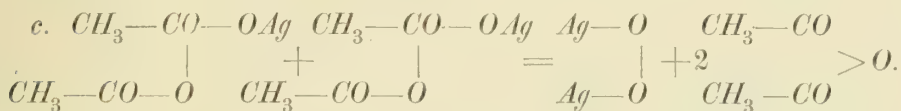


(zie pag. 27 en 28, over koolstof als hexavalent).

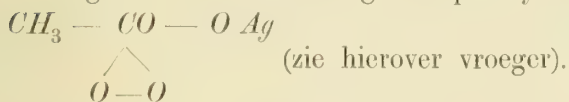
Vorming van zilverbioxyde, gebruik makende van overgangsreacties. Dit zou aldus kunnen geschieden, beginnende met:



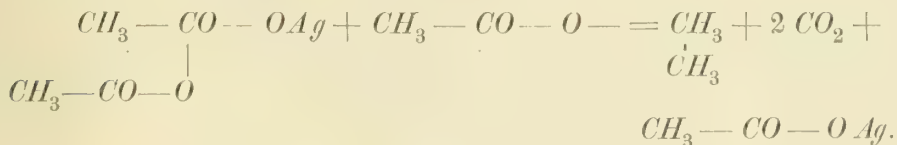
welke reacties bijgevolg dezelfde zijn, als die betreffende het ontstaan van oxy-azijnzuur zilver (zie boven). Volgt:



Volgt thans de vorming van peroxy-azijnzuur zilver: $3 Ag_2 O_2$.



Ontstaan van aethan met behulp van overgangsreacties. De reactie (ter vorming van $Ag_2 O_2$ en $CH_3. CO. OAg. 2O$) blijft dezelfde, maar wordt gevolgd door deze reactie:



Vervolg der studie van het zwarte product der electrolyse van zwavelzuur zilver. Bereiding N°. 31. De gevolgde weg was in 't algemeen dezelfde als vroeger, dat wil zeggen, dat werd uitgegaan van een verzadigde oplossing van het zout, waarvan sprake is, namelijk van zwavelzuur zilver, terwijl de oplossing gedurende de electrolyse werd geneutraliseerd met zilvecarbonaat, en gehouden op het punt van verzadiging (door de geneutraliseerde oplossing te

doen gaan door een *tweede* filtrum, bijgevolg bevattende zwavelzuur zilver). De eenige wijziging, die werd aangebracht, bestond daarin, om zich te bedienen van een glazen schaalte van ongeveer 25 c. c. inhoud, inplaats van 140 c. c. als vroeger. Dit had tengevolge, dat betrekkelijk veel aan zwarte stof buiten het reservoir werd afgezet; hetgeen beteekent, dat dit verloren is, b.v. ter analyse.

De hoeveelheid stof, overigens op de gewone wijze behandeld, bedroeg 1.1631 gr.. Na behandeling met water bleef terug 1.1126 gr., het verlies bedraagt bijgevolg 0.0505 gr. of 4.34 p. c., namelijk betrekking hebbende op de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” van oxy-zwavelzuur zilver, deel uitmakende der zwarte stof van electrolyse (zie de voorgaande Verhandeling). Gezegde wijziging is dus niet te beschouwen als een verbetering. Alvorens de wijze van bereiding nader meer of min te wijzigen, wilde men toch nog eenmaal den vorigen weg volgen (zie b.v. Bereiding N°. 30 enz., in de vorige Verhandeling).

Bereiding N°. 32. Men begon met den toestel twee dagen te laten werken (dag en nacht), dus vóór de electrolyse, waarvan het doel was, om later een oplossing te hebben, die goed *geneutraliseerd*, *verzadigd* en *homogeen* is. De electrolyse werd gedaan met een betrekkelijk *groot* glazen schaalte (zie Bereiding N°. 31), zooals trouwens vroeger werd verricht, terwijl het eenige verschil slechts bestond in een temperatuurs verschil van den dampkring, deze lager zijnde (het was in October), als gevolg waarvan de concentratie meer beperkt was. De opbrengst was die van 1.4605 gr.. Deze was wel de tot nog toe best geslaagde bereiding, zoowel wat betreft de grootte der kristallen (overigens van een deel der massa), als den glans der massa (overigens niet op gelijke lijn te plaatsen met het zwarte product der electrolyse van salpeterzuur zilver). Na behandeling met water onder verwarming, en daarna indampen, bedroeg het gewicht 1.391 gr., en was het verlies bijgevolg 0.0695 gr. of 4.75 p. c.; de buis was geplaatst geweest onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur). Een stuk *natrium* werd geplaatst in den vacuum-exsiccator naast het reservoir met zwavelzuur, namelijk niet in gemelde bewerking, zijnde de eerste, maar te beginnen met de tweede bewerking, en volgende bewerkingen met den vacuum-exsiccator (tot het gewicht niet meer verandert). Het natrium (zie boven) werd vroeger minstens één dag te voren geplaatst onder een gewonen exsiccator, als gevolg waarvan het bedekt was met een laag oxyde. Maar ditmaal was, meer bij vergissing, deze laag verwijderd, zoodat dientengevolge het metaal als zoodanig dienst deed en niet vooral het

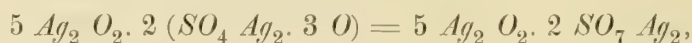
oxyde, namelijk als wateronttrekkend middel. Hoe dit ook zij, er werd een aanmerkelijk verschil gevonden in gewicht, terwijl de regel is, dat dit hoogstens eenige tienduizendsten van een gram bedraagt. De bewerking werd thans herhaald met natrium, dat aan de lucht had gestaan (onder een exsiccator, enz.). Merkwaardig is, dat dit achtnaal moest herhaald worden, alvorens het gewicht constant was, dat in hooge mate vreemd is te noemen. Aanleiding is er, om te veronderstellen, dat een weinig vluchtig petroleum zich bevond op het natrium, en gemeld abnormaal verschijnsel veroorzaakte.

Bereiding N°. 33. Er werd dezelfde weg gevolgd als bij Bereiding N°. 32, slechts werd alleen gebruik gemaakt van zwavelzuur, zonder natrium (onder den vacuum-exsiccator). De opbrengst bedroeg 1.3926 gr. (na te zijn gedaan in een groote reageerbuis). Na behandeling met water, als naar gewoonte, eerst bij 60°—70°, vervolgens bij 70°—80° (dit laatste meer zekerheidshalve, daar de zuurstof dan is uitgedreven), werd de buis geplaatst, tevens volgens gewoonte, in een vacuum-exsiccator (alleen met zwavelzuur), waarbij terugbleef 1.3263 gr.. Derhalve is het verschil 1.3926 gr.—1.3263 gr. = 0.0663 gr., of 4.76 p. c.. Voegen we er aan toe, dat het gewicht niet veranderde, toen de stof voor een tweede maal was geplaatst geweest onder een vacuum-exsiccator (alleen met zwavelzuur), en dit in verband met hetgeen werd gezegd onder Bereiding N°. 32 (zie vroeger pag. 38), die 4.75 p. c. gaf aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (afkomstig van oxy-zwavelzuur zilver, geacht deel te maken van peroxy-zwavelzuur zilver).

Bereiding N°. 34. Alles geschiedde als bij Bereiding N°. 33, behalve dat koolzuur zilver werd verplaatst door *silveroxyde* Ag_2O (trouwens nog eenig koolzuur zilver bevattende). In de groote reageerbuis bevond zich 1.0019 gr. aan zwarte stof, die, na met water te zijn verhit enz., terugliet 0.9542 gr., bijgevolg een verschil opleverende van 1.0016 gr. -- 0.9542 gr. = 0.0477 gr. of 4.76 proc.. Het gebruik van silveroxyde, in plaats van koolzuur zilver, schijnt derhalve geen voordeel aan te bieden, dat overigens vrij duidelijk is.

Overzicht der verschillende Bereidingen door electrolyse van zwavelzuur zilver ($SO_4 Ag_2$), allen gedaan met neutralisatie. In de volgende Tabel bevinden zich eenige gegevens met betrekking tot de Bereidingen N° 11 en volgenden, waarbij gebruik werd gemaakt van de schroef van Archimedes, met 't oog op een neutraliseeren der oplossing (zuur geworden als gevolg der electrolyse). Er is in

opgegeven de opbrengst, in verband met tijd en concentratie; en, wat van meer beteekenis is, het gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van het oxy-zwavelzuur zilver, verondersteld deel uit te maken van peroxy-zwavelzuur zilver). Het maximum met betrekking tot deze zuurstof, dat is bereikt, bedraagt 4.84 p. c., dus zeer dicht gelegen bij hetgeen vereischt de formule:



die verlangt ¹⁾ 4.9 p. c.. In 't algemeen zal de kans des te grooter zijn, dat de stof genoegzaam zuiver is, naarmate de hoeveelheid dezer zuurstof nadert tot dit maximum; altijd verondersteld, dat er geen bronnen van fouten in deze richting optreden.

Bereiding.	Datum.	Tijd.	Concentratie.	Opbrengst.	Zuurstof.	Aanmerkingen.
N ^o . 11	17 Jan. 1898	2	halfverzadigd	0.8398 gr.	4.67 p.c.	Zie vorige Verhandeling.
12	28	3		0.97	4.67	
13	10 Febr.	5		1.2087	3.91	mislukt (zie de vorige Verhandeling).
14	18	5		1.7048	4.55	
15	26	6		1.8807	4.3	
16	2 April	4		1.3153	4.52	
17	15	4		1.4302		zuurstof werd bepaald in V-buis.
18	23 Mei	4		1.2748	4.73	
19	3 Juni	4				het gewicht werd niet bepaald (zie vorige Verhandeling).
20	14	4		1.2098		
21	1 Juli	4		1.2674		(zie evenzoo de vorige Verhand.)
22	8	2	verzadigd	2.4588	4.66	
23	17 Sept.	2		3.3165	4.5	
24	22 Oct.	3		3.2699	3.79	de bereiding had blijkbaar te lang geduurd.
25	19 Nov.	1		1.3835	4.84	
26	23 Dec.	1		0.7831		van nu af aan, werd een tweede filtrum aangebracht met <i>zwavelzuur zilver</i> . Werd niet geanalyseerd (namelijk Bereiding N ^o 26).
27	31	1		1.5432	4.77	
28	25 Jan. 1899	2		2.3352	4.65	
29	10 Maart	3		2.9552	3.94	de bereiding had blijkbaar te lang geduurd.
30	10 April	1		1.1138	4.78	
31	6 Juni	1		1.1631	4.34	er werd gebruik gemaakt van een <i>klein</i> glazen schaalkje, zonder goed gevolg.
32	10 Oct.	1		1.4605	4.75	(minimum).
33	28 Nov.	1		1.3296	4.76	
34	8 Jan. 1900	1		1.0019	4.76	zilveroxyde, inplaats van koolzuur zilver.

¹⁾ Zie Verhand. d. K. A. v. W. te Amsterdam (Eerste Sectie) Dl. VII. No. 17 (1899).

Vervolg op de gegevens betreffende de ontledings-snelheid bij gewone temperatuur van peroxy-zwavelzuur zilver. Bereidingen N°. 20 en 21. Reeds komen gegevens in dien zin voor, in de vroegere Verhandeling (zie deze, pag. 26). Dergelijke waarnemingen hebben wel eenige waarde als zoodanig, maar toch vooral in verband met overeenkomstige gegevens, zoo met betrekking tot peroxy-salpeterzuur zilver. Uit de cijfers blijkt dan genoegzaam, dat deze twee snelheden niet zonder eenige analogie zijn (zie tevens de vorige Verhandeling en andere, wat betreft peroxy-salpeterzuur zilver).

Peroxy-zwavelzuur zilver (vervolg: zie de vorige Verhandeling).

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N° 20.			22 Juni 1899.	1.1945 gr.		0.0012 gr.	0.00007 gr.
			22 Sept. "	1.1914 "		0.0031 "	0.0002 "
			22 Dec. "	1.1902 "		0.0012 "	0.00007 "
			22 Maart 1900.	1.1896 "		0.0006 "	0.00004 "
			22 Juni "	1.1889 "		0.0007 "	0.00004 "

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N° 21.			10 Juli 1899.	1.2519 gr.		0.0018 gr.	0.0001 gr.
			10 Oct. "	1.249 "		0.0029 "	0.00017 "
			10 Jan. 1900.	1.248 "		0.001 "	0.00006 "
			9 April "	1.2474 "		0.0006 "	0.00004 "

Ontleding bij gewone temperatuur van peroxy-salpeterzuur zilver (vervolg ¹⁾). Nadat Bereiding N°. 25 andermaal een jaar had gestaan, heeft men thans tot zijn beschikking vier perioden. Zooals kan blijken uit de cijfers der bijgaande Tabel schijnt de ontledings-snelheid wat grooter te worden, maar zich overigens op merkwaardige wijze genoegzaam te handhaven. Tevens blijkt, dat de hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” welke is vrijgekomen, tot dusverre nog zeer verwijderd is van de theoretische hoeveelheid, zij deze 2 O op het molecuul der zwarte stof.

Peroxy-salpeterzuur zilver: $3 Ag_2 O_2 . N O_3 Ag . 2 O$.

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N° 25.	200 gr.	25 Nov. 1895.	28 Nov. 1895.	5.7658 gr.			
			15 Dec. 1896.	5.7492 "		0.0166 gr.	0.000052 gr.
			16 Dec. 1897.	5.7348 "		0.0144 "	0.000047 "
			16 Dec. 1898.	5.7158 "		0.019 "	0.000063 "
			18 Dec. 1899.	5.6955 "		0.0203 "	0.000067 "

¹⁾ Zie Verhand. d. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam. (Eerste Sectie). Dl. VII. N. 2 pag. 28 (1899).

Over de bereiding van *silveroxyde* ($Ag_2 O$), door verhitten van *koolzuur zilver* ($CO_3 Ag_2$). Er wordt veel tijd vereischt, alvorens deze ontleding voor het grootste gedeelte heeft plaats gehad, en dat, in een langzamen stroom van droge lucht, en bij de temperatuur, waar de dissociatie aanvangt van het *silveroxyde* ($Ag_2 O$), zijnde zoo ongeveer 190° — 200° (zie de voorgaande Verhandeling), in welk geval het product veelal nog eenig *koolzuur zilver* bevat. Daarom heeft men het geheel zóó ingericht (met 't oog op het belang voor de electrolyse van *azijnzuur zilver*), dat de bereiding *onafgebroken* door gaat tot het einde toe (namelijk dag en nacht). De tijd daartoe vereischt, is afhankelijk van verschillende omstandigheden, onder anderen van de wijze van plaatsing der V-buis in het kopervijzel (zie de vorige Verhandeling), enz., dat grooten invloed kan uitoefenen op de temperatuur, aangegeven door den thermometer, waarvan het kwik-reservoir zich ongeveer bevindt op de hoogte van het benedenste deel der buis, met de stof; ook is de tijd ter ontleding afhankelijk van de snelheid van den luchtstroom, enz.. Eenige malen had de ontleding op voldoende wijze plaats (met het doel voor oogen) in vier dagen (dag en nacht), maar soms zijn daartoe noodig 6 dagen en meer, in welk geval het terugblijvende zoo ongeveer 84—85 p.c. bevat aan *silveroxyde*, berekend op 100 gew. d. *koolzuur zilver* (de buis werd gewogen vóór en na de bereiding), terwijl de theorie vordert 84 p.c. *silveroxyde*. De capaciteit van den gashouder (omkeerbaar) is ongeveer die van *zeven* liter, en doet dienst gedurende 24 uur (een snellere luchtstroom zou mogelijkerwijze de ontledingssnelheid een weinig kunnen bevorderen, en bijgevolg den tijd meer of min herleiden tot een minimum).

OVERZICHT.

Men laat hieronder volgen een overzicht der uitkomsten van de studie met betrekking tot het *peroxy-azijnzuur zilver* in de eerste plaats; waarna nog volgen eenige gegevens over *peroxy-zwavelzuur zilver* en *peroxy-salpeterzuur zilver*. In overeenstemming met het product der electrolyse van *salpeterzuur zilver*, heeft men met de twee anderen, drie vertegenwoordigers, om het zoo uit te drukken, van een zeker belangrijke reeks van verbindingen, vrij waarschijnlijk samengesteld (overigens ten deele uit een theoretisch oogpunt) uit *silverbioxyde* ($Ag_2 O_2$), en een *silverzout* van een *oxy-zuur*, zijnde in deze gevallen, van *azijnzuur*, *zwavelzuur* en *salpeterzuur*. In deze

verbindingen schijnt het maximum van verzadiging door *zuurstof* te zijn bereikt, en dat wel, dank zij het *zilverbioxyde*, dat het zilverzout dezer oxy-zuren een voldoende mate van stabiliteit geeft, ten einde te kunnen bestaan onder gewone omstandigheden (ten minste lang genoeg; altijd heeft wat ontleding plaats), om er een grondige analyse van te kunnen doen.

1°. De proeven betreffende de electrolyse van een waterige oplossing van *azijnzuur zilver* zijn aanvankelijk gedaan met een en dezelfde oplossing, namelijk wat de eerste reeksen betreft; en dat met het doel, om te weten te komen, 1° welke de invloed is van de *concentratie* op de opbrengst, en de zuiverheid van de zwarte stof ¹⁾; en 2° of een deel van het zout in oplossing ook is ge-oxydeerd in den zin der wel bekende reactie van Kolbe ²⁾ (meer op indirecte wijze nagegaan).

2°. De methode ³⁾, gevolgd ter analyse, komt in hoofdzaak neder op die bij peroxy-zwavelzuur zilver toegepast. Wel werd een poging gewaagd, om de zwarte stof bij gewone temperatuur met water te behandelen met het doel, een omzetting zooveel mogelijk te voorkomen van azijnzuur zilver in een ander zilverzout (die bij verwarming gemakkelijker zou intreden); maar men was genoodzaakt, daarvan voorloopig ten minste af te zien, in aanmerking genomen de buitengewoon lange tijd, die dan werd gevorderd voor de bepaling der zuurstof van het oxy-azijnzuur zilver (verondersteld deel uit te maken van het peroxy-azijnzuur zilver). Er zijn overigens nog vele analyses te doen, ook in een anderen zin, zal men kunnen beschikken over de noodige gegevens, en de vereischte contrôle hebben; het onderwerp liet namelijk niet toe, afdoende uitkomsten te verzamelen, vanwege de zeer beperkte hoeveelheid stof, waarover kon beschikt worden.

3°. Er werden analyses gedaan van het product ⁴⁾ van electrolyse; en tevens van het zilverbioxyde ⁵⁾, dat terugblijft bij behandeling met water (onder verwarming). Steunende op de gegevens, waarover thans valt te beschikken, is de verbinding (waarvan sprake is) te beschouwen als te bevatten de resten van *zilverbioxyde* (Ag_2O_2), en van een *oxy-zout van zilver* van een zuur, dat kan zijn azijnzuur, maar ook wel zou kunnen wezen een afgeleide er van,

¹⁾ Zie deze Verhandeling pag. 18, 19.

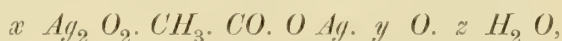
²⁾ l. c. pag. 29.

³⁾ l. c. pag. 22.

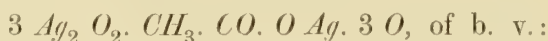
⁴⁾ l. c. pag. 4—21.

⁵⁾ l. c. pag. 21.

zij dit b. v. glucolzuur, gluoxylzuur, enz. (in den vorm van oxy-azijnzuur, oxy-glucolzuur, oxy-gluoxylzuur, enz.). Door gebrek aan de noodige hoeveelheid stof, is het ook nu onmogelijk, te zeggen, of de oorspronkelijke zwarte stof kristalwater bevat of niet; en hetzelfde geldt met betrekking tot het zilverzout, dat door water is uitgetrokken (nadat de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” was nitgedreven). De oplosbaarheid ¹⁾ van dit zout schijnt overigens meer of min overeen te komen met die van azijnzuur zilver, en zoo ook de kristalvorm (ten minste van een deel der massa). De analyses, die wel het meeste vertrouwen verdienen, zouden kunnen spreken voor 3 O aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” ²⁾; uit een theoretisch oogpunt echter zou men meer geneigd kunnen zijn, de aanwezigheid van 2 O (en zelfs 1 O) als waarschijnlijk aan te nemen, en in dat geval b. v. 1 O in den vorm van $H_2 O$, enz. ³⁾; zoodat de formule der oorspronkelijke zwarte stof (daarin de aanwezigheid veronderstellende van azijnzuur zilver) zou zijn terug te geven b. v. door de volgende:



nader (volgens de beschikbare gegevens):



Talrijke analyses zijn trouwens nog te verrichten, zoo mede een *directe* bepaling van water en tevens van „gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, (met analyse ⁴⁾), en elementair-analyse der zwarte stof en van het *zilverzout*, enz., alvorens *samenstelling en structuur* genoegzaam zijn vastgesteld. Maar dit neemt niet weg, dat er in hoofdzaak weinig zal te veranderen zijn, indien men als voorloopige formule aanneemt b. v. $3 Ag_2 O_2. CH_3. CO. O Ag. 2 O$ (de coëfficiënt van $Ag_2 O_2$ zou ook wel eens gewijzigd moeten worden, maar dit is toch vrij onwaarschijnlijk).

Om zich eenig denkbeeld te vormen van de verwickelingen, die zich zouden kunnen voordoen, verwijst men naar hetgeen in dien zin is gezegd (zie deze Verhandeling pag. 26, 28), te weten, dat

¹⁾ Zie de analyses pag. 4, 21.

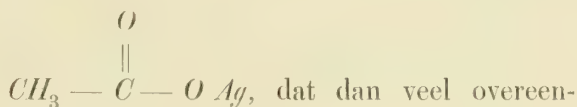
²⁾ Zie overigens pag. 23.

³⁾ Zie pag. 27, 28.

⁴⁾ l. c. pag. 26, 28.

zich drie verschillende gevallen kunnen voordoen met betrekking tot de omzetting van azijnzuur zilver tot de zwarte stof, en meer bedenkelijk, een samengaan dezer gevallen, als gevolg waarvan toestanden zouden intreden, die alleen met een betrekkelijk groote hoeveelheid stof zouden te ontwarren zijn. In ieder geval staat de hoofdzaak genoegzaam vast, dat er namelijk verbindingen bestaan van *silverbioxyde* en *een zilverzout van een oxy-zuur* van organischen aard (gelijk dit is aangetoond voor salpeterzuur en zwavelzuur), in den bekenden zin; terwijl dit zuur is azijnzuur, of een afgeleide, in dit geval waarschijnlijk een zeer eenvoudig afgeleide.

4°. Zij voor 't oogenblik als formule aangenomen $3 Ag_2 O_2 \cdot CH_3 \cdot CO \cdot O Ag \cdot 2 O$ (die wel weinig zal afwijken van de waarheid), dus een moleculair-formule; en $Ag_2 O_2$ voorstellende door $Ag - O$, dan zou het oxy-zout kunnen zijn:



komst bezit met het oxy-salpeterzuur zilver:



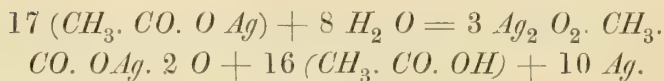
peroxy-azijnzuur zilver veel overeenkomst hebben (zie boven) met $3 Ag_2 O_2 \cdot N O_3 Ag \cdot 2 O$ (zie overigens boven, over de aanwezigheid wellicht van 3 O in het dus geheeten peroxy-azijnzuur zilver). Het atoom koolstof zou *dan* bijgevolg optreden als *hexavalent* ¹⁾ (en zoo ook ²⁾ bij aannamen van 3 O, zie hierboven). Dit wil noodwendig niet zeggen, dat de koolstof als zoodanig optreedt.

Ter vorming van één molecuul peroxy-azijnzuur zilver (zij dit met 2 O), komen niet minder dan 17 moleculen van het oorspronkelijke zilverzout der electrolytische oplossing in werking (en hetzelfde kan worden gezegd van zilvernitraat tegenover peroxy-salpeterzuur zilver ³⁾).

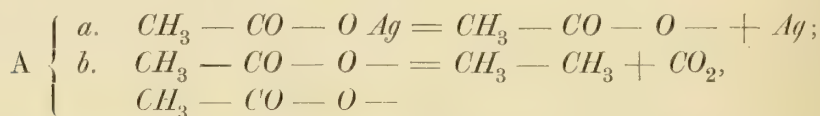
¹⁾ 1. c. pag. 27.

²⁾ 1. c. pag. 28.

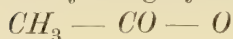
³⁾ 1. c. pag. 33.



5°. Zeer waarschijnlijk, moet in de electrolyse van azijnzuur zilver het bestaan worden aangenomen van twee, meer of min, parallelle reacties¹⁾ (niet te verwarren met secundaire reacties), te weten, 1° de vorming van het peroxy-azijnzuur zilver, en 2° de reactie, genoemd die van Kolbe (het directe bewijs is nog te leveren). Argumenten voor deze opvatting vindt men in de betrekkelijk snelle vermindering van concentratie, in verband met het vrijkomen van gas (dat trouwens zuurstof zou kunnen zijn). Maar ook niet te vergeten, in de electrolyse van andere zouten van azijnzuur; en het is meer te beschouwen als een feit dan een veronderstelling, dat de reactie van Kolbe als tweede reactie optreedt (overigens wellicht minder van secondaire aard). In dien zin heeft men twee reacties, welke bij gevolg genoegzaam te gelijktijd plaats hebben, zijnde deze (voor A):



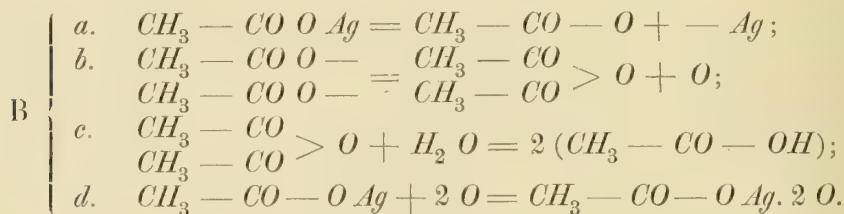
terwijl mogelijkerwijze aanvankelijk optreedt de verbinding²⁾:



| . En de andere reactie (B.a. en B.b.)



is bij gevolg die, betreffende de vorming b. v. van oxy-azijnzuur zilver, teruggegeven in de volgende vergelijkingen³⁾:



6. Een overzicht is gegeven van alle Bereidingen, ook nieuwe⁴⁾, betreffende het *peroxy-zwavelzuur zilver* [zij dit: $5 \text{Ag}_2 \text{O}_2 \cdot 2 (\text{SO}_4 \cdot 3 \text{O} \cdot \text{Ag}_2)$], nadat *neutralisatie* (door koolzuur zilver) was ingevoerd, waarvoor alleen een meer ernstige studie mogelijk werd⁵⁾. Tevens zijn er

¹⁾ 1. c. pag. 28.

²⁾ 1. c. pag. 30.

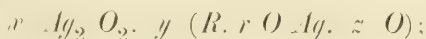
³⁾ 1. c. pag. 31.

⁴⁾ 1. c. pag. 37.

⁵⁾ 1. c. pag. 40.

eenige gegevens opgenomen aangaande de zelfontleding van het *peroxy-salpeterzuur zilver* ¹⁾, aangezien thans kan beschikt worden over een periode van vier jaar; en mede overeenkomstige gegevens van *peroxy-zwavelzuur zilver* ²⁾.

7. Het bestaan van *peroxy-azijnzuur zilver* (of een ander organisch zuur, zie hierboven), maakt het, met dat van *peroxy-salpeterzuur zilver* en *peroxy-zwavelzuur zilver*, vrij waarschijnlijk, dat men hier te doen heeft met geheel een reeks van verbindingen, waarvan de algemeene formule, hieronder gegeven, kan geacht worden het karakter uit te drukken, zij deze:



in geval van het peroxy-salpeterzuur zilver is dan $x = 3, y = 1, R = N \text{ O}_2, r = 1, z = 2$, want men heeft: $3 \text{ Ag}_2 \text{ O}_2 \cdot N \text{ O}_2 \cdot O \text{ Ag} \cdot 2 \text{ O}$. Deze verbindingen schijnen dit merkwaardigs te hebben, dat de verzadiging door zoogenaamde *electrolytische zuurstof* streeft naar een maximum in hoeveelheid, en bij gevolg, wat quantivalentie betreft. Ook sommige andere metalen zullen waarschijnlijk overeenkomstige verbindingen kunnen vormen, maar hiervan is nog niets bekend.

8. Een waterige oplossing van azijnzuur zilver, en zoo ook van zwavelzuur zilver, schijnen niet te worden aangedaan door een dergelijke oplossing van waterstof-bioxyde ³⁾ ($H_2 \text{ O}_2$), in den zin als electrolytische zuurstof dit vermag te doen (men ging uit van een zoutoplossing, die gediend had voor electrolyse, ten einde zooveel mogelijk onder gelijke omstandigheden te werken).

Genoemde reeks van verbindingen (zie onder 7.) bevat bijgevolg zilverzouten, hetzij anorganisch of organisch, die aanvankelijk, om het zoo uit te drukken, waren verzadigd geworden met zuurstof langs gewonen weg, en daarna zijn oververzadigd langs electrolytischen weg. Als eerste voorbeeld van een organisch zilverzout, biedt de electrolyse van *azijnzuur zilver* buitengemeen belang aan, en dat in den zin vooral in de Verhandeling aangeduid, maar toch bovenal met 't oog op de *quantivalentie* van het atoom koolstof, ingeval de structuurformule overeenkomt met die der twee andere zwarte verbindingen electrolytisch erlangd (overigens nog te bewijzen).

¹⁾ 1. c. pag. 41.

²⁾ 1. c. pag. 41.

³⁾ 1. c. pag. 26.

Maar een meer uitvoerige en dieper ingrijpende studie wordt vereischt, en in de eerste plaats van het product ontstaan bij electrolyse van *azijnzuur zilver*, dat den meer intiemen aard der koolstof schijnt te kunnen gelden; en alles, wat de eigenlijke natuur dezer grondstof betreft, kan niet anders dan van groote waarde zijn. Deze studie biedt, meer algemeen opgevat, ook hare technische zijde aan, in zooverre als kennis met betrekking tot de ophooping van zuurstof in eenig molecuul, al ligt hare toepassing vindt, en wel vooral, indien dit bereikbaar is langs electrolytischen weg, waardoor de tijd als bezwarende factor, als 't ware genoegzaam is buitengesloten. Toch wint de wetenschappelijke zijde het in beteekenis, en een meer grondige studie betreffende de electrolyse van azijnzuur zilver enz., in de richting die is aangegeven, zal niet anders dan moeten bijdragen, als gezegd, tot de kennis van den aard van de koolstof, wat aangaat het maximum van valentie. En de hoop wordt gekoesterd, dat de hoeveelheid stof geen hinderpaal zal opleveren tot een voortzetten der ingeleide studie.

Utrecht, 30 Juni 1900.

(20 September 1900).

BIJDRAGE
TOT DE
WETENSCHAPPELIJKE BIOGRAPHIE VAN
G. J. MULDER.

HISTORISCH KRITISCHE BESCHOUWING

VAN ZIJN WERK :

De Scheikunde der bouwbare Aarde

DOOR

J. M. VAN BEMMELEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N^o. 7.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Maart 1901.

BIJDRAGE
TOT DE
WETENSCHAPPELIJKE BIOGRAPHIE VAN
G. J. MULDER.

HISTORISCH KRITISCHE BESCHOUWING

VAN ZIJN WERK :

De Scheikunde der bouwbare Aarde

DOOR

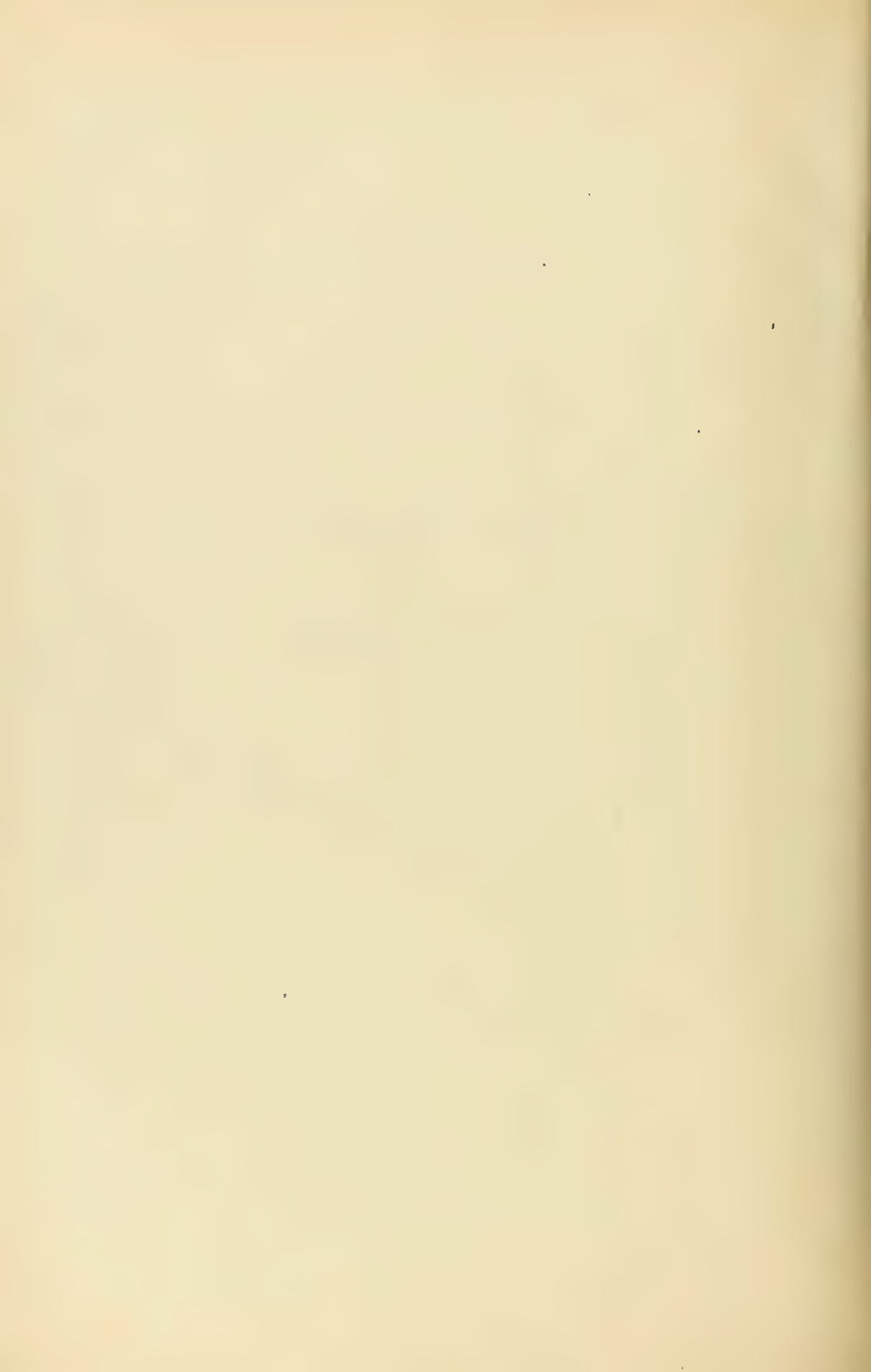
J. M. VAN BEMMELEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VII. N°. 7.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1901.



Bijdrage tot de wetenschappelijke Biographie van G. J. MULDER.

HISTORISCH KRITISCHE BESCHOUWING
VAN ZIJN WERK: SCHEIKUNDE DER BOUWBARE AARDE

DOOR

J. M. VAN BEMMELEN.

INLEIDING.

In 1859 ondernam MULDER de taak om zich geheel op de hoogte te stellen van alles wat over de bouwbare aarde in verband met den plantengroei onderzocht en beschreven was, en om dit alles aan een kritisch onderzoek te onderwerpen. Zijn werk omvatte dus de Chemie van den bouwgrond. Hij las daarover oudere en jongere schrijvers, bracht de *gansche* litteratuur te zamen, en legde de uitkomsten nauwkeurig geordend in 4 deelen neder (1900 bladzijden groot). Dit reuzenwerk volbracht hij in één jaar (verschenen in 1860).

Tweeërlei doel heeft hij daarmede willen bereiken. Vooreerst om zich nauwkeurig rekenschap te geven van hetgeen na al dat onderzoek en na al die gegeven beschouwingen en theorieën als ware wetenschappelijke winst is verkregen, dus wat verklaard en wat niet verklaard is — ten tweede om de dwalingen en verkeerde richtingen te bestrijden, die zich naar zijne meening van de toepassing van de wetenschap op den landbouw hadden meester gemaakt, en om deze door betere inzichten te vervangen. En aangezien nu niemand meer dan LIEBIG daarvoor aansprakelijk was, zoo is in

zijn boek ook een voortdurende bestrijding van LIEBIG's leeringen geworden.

Niet medegesleept (zooals hij zegt) door een waan van den dag — eene humuspasie, eene mineraalpasie — heeft MULDER ernstig getracht zoo onpartijdig mogelijk te zijn, ook zichzelf niet sparende, door van alle proefnemingen het wezenlijke mede te deelen, ze kritisch te toetsen en te benuttigen, en aan iederen waarnemer zijn rechtmatig deel te geven. Hij heeft de denkbeelden der oudere schrijvers ¹⁾ INGENHOUSZ, DE SAUSSURE, SENNEBIER, DAVY, THAER, DECANDOLLE enz. over plantenvoedsel en plantenvoeding, vruchtbaarheid, stalbemesting, den zuivelbouw, het ploegen enz. niet verworpen, maar ze vastgeknoopt aan het nieuwere en daardoor de historische ontwikkeling der wetenschap, door LIEBIG miskend en verstoord, weder op den goeden weg trachten te brengen. Hij heeft recht trachten te doen aan WAY, STÖCKHARDT, E. WOLFF, LAWES en GILBERT, KÜHLMANN, VÖLCKER en vele anderen, door LIEBIG op de heftigste wijze bestreden, ja verguisd en op zijde gezet.

Hij heeft de ervaring der landbouwers, zooals die zich in de oude met goeden uitslag en sinds eeuwen gevolgde praktijken openbaart, niet verworpen, maar getracht om de waarheid uit te vinden, die er aan ten grondslag ligt ²⁾. Hij geeft geene afgeronde theorieën,

¹⁾ Zie bijv.:

II. 288—291. DE SAUSSURE's Hoofdbeginselen, waarop de plantenvoeding steunt, zijn nog geldig.

365—367. De trage omzetting der humusstoffen door DE SAUSSURE erkend.

414. Het voedingsvocht in den bodem, naar DE SAUSSURE.

II. 474. SENNEBIER, INGENHOUSZ, DE SAUSSURE, DECANDOLLE: Koolzuur der lucht is hoofdvoedsel der planten.

III. 188 en 218. DE SAUSSURE, DECANDOLLE en anderen: De beteekenis der anorganische bestanddeelen der planten.

212. DE SAUSSURE: Beteekenis der phosphaten.

III. 2. WOLFF en STÖCKHARDT: Nuttigheid der stikstofbemesting.

12—14. DE SAUSSURE: Ammonia der lucht en oplosbare stikstofverbindingen zijn het stikstofvoedsel der planten.

15. DAVY: Salpetervorming in den bodem.

III. 219—225. Verdediging van DE SAUSSURE, SCHWERTZ, THAER, BERZELIUS, GAY LUSSAC, BOUSSINGAULT, PAYEN tegen LIEBIG's bewering, dat deze mannen vóór 1840, dus vóór LIEBIG's uitspraken, de vruchtbaarheid uitsluitend aan humus en organische stoffen hadden toegeschreven.

Enz., enz., enz.

²⁾ Zie bijv.:

III. 407. Afnemning van de vruchtbaarheid eens bodems voor tarwe door gebrek aan stikstofhoudenden mest.

IV. 118—119 en 152—156. Verklaring van den ouden regel: Dierlijke bemesting is de beste. Wederlegging van LIEBIG's: Emancipation des Stalldüngers.

die den waan wekken, alsof de groote vraagstukken reeds opgelost zijn, maar stelt gedurig in het licht waar onze kennis nog armoedig en ontoereikend is ¹⁾.

Het boek heeft daardoor twee groote verdiensten.

Vooreerst is het eene vraagbaak voor elk, die het standpunt der wetenschap in 1860 wil leeren kennen en het toen voorhanden materiaal wil raadplegen.

Ten tweede wijst het schier op elke bladzijde aan, wat nog onderzocht moet worden, welke vragen tot nieuw onderzoek uitlokken en in welke richtingen zich dat moet bewegen. De uitkomst heeft dan ook geleerd, dat de vorderingen die sinds gemaakt zijn zich voor een groot deel aan de vragen vastknoopen, die in dit werk zijn gesteld en behandeld.

De groote vraagstukken, die toen aan de orde waren, laten zich kortelijk aldus samenvatten: Eigenen zich de planten ook vrije stikstof toe of zijn alleen nitraten en ammoniakzouten stikstofvoedsel? Kunnen alleen anorganische stoffen de plant voeden of zijn ook organische stoffen (de humus) daartoe in staat? In welken vorm bevat de bodem eigenlijk de plantenvoedende bestanddeelen en wat beteekent het (toen kort geleden ontdekte) vastleggingsvermogen des bodems voor kali en andere bases, voor phosphorzuur en voor kiezelzuur? Nemen de planten de stoffen uit den bodem alleen in opgelosten toestand door hunne wortels op, of werken zij mede om de in den bodem vastgelegde kali, het vastgelegde phosphorzuur enz. los te maken en op te nemen? Is het waar, dat de anorganische stoffen in den bodem ten slotte alleen de vruchtbaarheid bepalen, in zooverre

IV. 137. De deugdelijkheid van den ouden tuinbouwregel: bemesten vroeg in het voorjaar, later gieren als de jeugdige plantjes ont'uiken.

204—257. De praktische regels in den wisselbouw, enz. enz.

258. Goede graanoogsten op onvruchtbaar grasland na scheuring (SERRURIER: Boerengoudmijn 1807).

243. Zomerploegen. (SERRURIER).

Enz., enz., enz.

¹⁾ Zie bijv. over de organische stoffen in den bodem I 367.

Zoo ook omtrent de vraag of planten organische stoffen opnemen II 407.

— Of de luchtstikstof wel werkeloos is I 315 vgg.

— Hoe de stikstof in den humus aanwezig is I 435, III 45—55.

— Dat de werking van de zuurstof, van de organische stoffen, van de vochtigheid, van de temperatuur, in den bodem nog zoo weinig bekend is II 292—308.

— Welk het nut is van het draineeren, een verschijnsel waarbij te veel factoren medewerken wier werking wij nog niet kennen IV.

— Waarom leguminosen een goede voorvrucht voor granen zijn, en of zij dan soms de luchtstikstof assimileeren.

Enz., enz., enz.

koolzuur en ammonia altijd genoeg door den dampkring worden aangevoerd? Is de uitputting van den bodem voor een bepaald gewas alleen aan gebrek aan de voor eene bepaalde kultuurplant noodige minerale bestanddeelen toe te schrijven? Kan de vruchtbaarheid van den bodem reeds enkel door aanvoer van minerale meststoffen hersteld worden?

HOOFDSTUK I.

De theoretische vraagstukken.

§ 1. Samenstelling van den bouwgrond en stofwisseling daarin.

De samenstelling van den bouwgrond is het uitgangspunt van MULDER's werk. Het inzicht, dat hij daarover uit al de voorhanden waarnemingen meent te mogen afleiden ligt aan al zijne beschouwingen over de werkingen in den bouwgrond, over deszelfs vruchtbaarheid en onvruchtbaarheid, over de voedselopname der planten, ten grondslag en doorloopt als een leidende draad het gansche boek.

Die samenstelling werd toen nog uiterst gebrekkig voorgesteld. MULDER nu stelt voor het eerst op den voorgrond dat als belangrijkste bestanddeel der bouwgronden de *geleiachtige* stoffen te beschouwen zijn, die wel onderscheiden moeten worden, 1° van de onverweerde deeltjes (kwarts en silicaten), 2° van losse stoffen, die sommige bodems wel eens in overmaat bevatten, zooals kalk en magnesia als koolzure kalk en koolzure magnesia, phosphorzuur als phosphorzure kalk, vrij ijzeroxyde (waarbij nooit vrije aluinaarde), 3° van de kleine hoeveelheid sulfaten, chloruren, nitraten, zouten met organische zuren, ammoniakzouten, welke tijdelijk in het bodemvocht in oplossing zich bevinden. Die geleiachtige stoffen zijn hem het essentieele van de vruchtbaarheid; zij zijn in geringe hoeveelheid in schrale zandgronden, in groote hoeveelheden in vette kleigronden aanwezig. Zij bestaan uit de humusstoffen en uit complexe aluinaarde — ijzeroxydule en oxyd — silicaten in geleiachtigen toestand, die de vier bases (kali, magnesia, kali, natron) en tevens phosphorzuur en humuszuren in hun complex kunnen opnemen. In zuren zijn zij oplosbaar, zoodat zij de stoffen zijn die de aluinaarde en verder het grootste deel van het ijzeroxyd (oxydule), de kalk,

magnesia, natron, kali, het phosphorzuur, de humuszuren leveren, welke door uittrekking der aarde met zoutzuur in oplossing worden verkregen, onder vrijwording van kiezelzuur. Dit laatste kan door alkaliën geheel opgelost worden. Hij geeft ze den naam van zeolithische silicaten, welke benaming minder juist is, waarom ik ze in het vervolg geleiachtige silikaten zal noemen.

Uit dit alles blijkt, dat MULDER in de beroemde proeven van WAY over deze door hem kunstmatig uit waterglas en kalk-magnesia-ijzeroxyd enz. bereide zouten den sleutel heeft gezocht om in de samenstelling der bouwaaarde en hare vruchtbaarheid voor de plantenvoeding door te dringen. De uitkomst heeft bewezen, dat hij daarin grootendeels juist heeft gezien en dat hij de belangrijkheid van WAY's proeven, zoozeer door LIEBIG miskend ¹⁾, in het ware licht heeft gesteld. Het chemisme, dat in de aarde plaats heeft en aan de plantenvoeding ten goede komt, wordt door MULDER voornamelijk in dit bestanddeel gezocht.

Ofschoon nog niet de onbepaalde (niet chemische) verbindingen of absorbtie-verbindingen aannemende — hetgeen eerst na twintig en meer jaren zou opkomen en ook thans nog door velen niet ingezien wordt — zoo onthoudt MULDER zich wel om aan deze stoffen chemische formules volgens bepaalde verhoudingen toe te kennen. Hij schrijft aan dezelve een zeer kompleks karakter toe en spreekt slechts van binding van bases en ammoniak aan geleiachtige kiezelzure aluinaarde. Hij spreekt van de binding van phosphorzuur door het *gelatineuse* ijzeroxyde en de *gelatineuse* aluinaarde, en van de vermindering van dat bindend vermogen door de koude en den tijd, waarbij het ijzeroxyd minder oplosbaar in zuren wordt. Hij wijst evenzoo op eene verbinding van ijzeroxyde met kalk ²⁾. Hij is als het ware na daaraan toe, om de absorbtie-verbindingen aan te nemen. Voor het phosphorzuur gebruikt hij de uitdrukking: „op onbekende wijze geïncorporeerd”. Hij onderscheidt die binding van de chemische welke bij zouten voorkomt, want deze beschouwt hij als zuren met bases tot zouten *chemisch* vereenigd. Toch neemt hij ook voor deze aan dat zij gebonden kunnen worden in het gelei-

¹⁾ LIEBIG noemt WAY's ontdekking: eine Theaterdecoration.

IV. 111. Das ganze Gebäude der Theorien der Herren WAY und E. WOLFF zerfällt in Staub und Schutt. Alles ist Selbsttäuschung, Theaterdekoration. Es ist aber zu allen Zeiten so gewesen; immer hat die alte Lüge an der Thür gestanden, wenn das noch junge Kind der Wahrheit Einlass begehrte.” (LIEBIG in 1855).

In 1858 noemt hij weder WAY's proefnemingen belangrijk voor den praktischen en theoretischen landbouw. II. 164—167.

²⁾ II. 93—95.

achtige kompleks, „deze doordringende op physische wijze” ¹⁾. Dat dekt dus hetgeen wij thans noemen: geabsorbeerd.

Aan de gelatineuse bestanddeelen, humus en geleiachtige silikaten, kent hij dan ook inzonderheid het absorbtie-vermogen toe, inzonderheid van eene groote hoeveelheid water en van gassen, van bases, van ammoniak, zouten enz. Gebruikt hij daarbij het woord „physische aankleving” dan bewijst dit alleen dat hij die absorbtie niet van adsorbtie onderscheidt. Wel onderscheidt hij deze gevallen van absorbtie van het geval, waarbij chemische uitwisseling van bases tevens plaats heeft — eene onderscheiding welke door zooveelen zijner tijdgenooten verzuimd wordt.

Het belangrijkste van MULDER's arbeid is voorzeker de wijze, waarop hij het chemisme toelicht dat in deze stoffen plaats heeft. Hij voert daarbij alles aan uit de litteratuur ²⁾ wat dienen kan om te bewijzen, dat de chemische werkingen zoo dikwijls *niet* afloopen (wij spreken tegenwoordig van omkeerbare reaktiën), zoodat (in den zin van BERTHOLLET) zich een toestand van evenwicht vormt tusschen de verschillende zouten in oplossing, of tusschen opgeloste zouten en onopgeloste zouten *waarvan de bases kunnen wisselen*. Hij brengt zulks in verband met den invloed dien twee en meer zouten op elkanders oplosbaarheid hebben, waardoor ook onoplosbare eenigszins oplosbaar worden; zooals bijv. phosphorzure kalk in zoutoplossingen. MULDER noemt dit: *de verdeeling van het chemisme* en beschouwt die terecht als het snoer om den weg te vinden in de warreling der toestanden ³⁾.

Hoogst merkwaardig voor dien tijd zijn M. volgende woorden ⁴⁾: „Besliste toestanden kunnen tusschen twee stoffen, die op elkander „chemisch inwerken, optreden; zooals bij het ontstaan van neerslagen — bij het doorvoeren van eene elektrische vonk door een „gasmengsel — bij kristallisatie of op andere wijzen, als wanneer „eene konstante verbinding uittreedt. In die gevallen treden de „*vaste verhoudingen* op in al hare kracht. Doch in andere toestanden ontsnappen die vaste verhoudingen; overal is wankelbaarheid „van chemisme waar vele stoffen onderling zijn gemengd.”

¹⁾ III. 467.

II. 112—128. Hierbij worden eenige proeven zijner leerlingen vermeld.

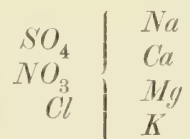
²⁾ Zoo de proefnemingen van DEBUS, MARGUÉRITE, GLADSTONE, REYNOSO, MOHR, ROSE, MALAGUTI en zijne eigene over *Ag Cl* met eene oplossing van *Ag NO³* of van *Na Cl* (I. 4—17).

Zoo behandelt hij ook uitvoerig het evenwicht tusschen geleiachtig *Si O₂*, koolzuur en alkali (kali of ammoniak). I. 171—175.

³⁾ II. 4, 39, 65—67, 129—132.

⁴⁾ II. 6.

In een mengsel van zouten in oplossing moet men dus naar MULDER aannemen, dat van de mogelijke onderlinge verbindingen zekere hoeveelheden aanwezig zijn ¹⁾. Hij komt er dus reeds toe om in een welwater niet een sulfaat, een chloruur, een nitraat enz. aan te nemen, maar zooveel sulfaten, chloruren, nitraten als er bases zijn of liever één zout; zoo stelt hij dan reeds voor (in 1860) om te schrijven



d. i. de zuurradikalen ter eener en de basische radicalen ter anderzijde ²⁾. Slechts een enkele chemicus heeft bij zijne analyses van aarden, van natuurlijke waters, van moederloogen enz. MULDER's voorbeeld sinds jaren nagevolgd, en nog heden wordt die noodzakelijkheid nog door weinigen ingezien, zoodat OSTWALD (vóór korten tijd) het noodig vond, daarop aan te dringen.

Bij die niet aflopende reaktiën tusschen verschillende stoffen in wat wij thans een homogeen en een heterogeen stelsel noemen, stelt MULDER de zoogenoemde massawerking bij deze omkeerbare reaktiën reeds in het juiste licht. Hij erkent dus 1° dat het evenwicht afhangt van de concentratie der oplossing van elk zout, zoowel in de oplossing als in het geleijchtig silikaat of humaat, 2° dat de reaktiën alleen tot het einde kunnen gevoerd worden, als men eene oplossing telkens vernieuwt; 3° dat de gelatineuse stof een eigen bindingsvermogen heeft voor elke basis, en dat dit vermogen sterker is voor de kali dan voor de kalk enz. Hij kan dus de absorbtieproeven op juiste wijze toelichten: Eerstens de absorbtie van bases door de gelatineuse stoffen (de geleijchtige silikaten, humusstoffen) uit hare oplossingen tot een zeker evenwichtsbedrag en *buiten aequivalent verhouding*, en ten tweede eene *aequivalente* uitwisseling der bases tot een *zeker evenwichtsbedrag* (dus niet aflopend) ³⁾, wanneer eene bouwaaarde

¹⁾ Men vindt evenwel bij MULDER nog niet de *nauwkeurige* onderscheiding van 1° de niet aflopende reaktiën (tusschen zuren en bases, bases en zouten, zouten en zouten), 2° gedissocieerde chemische verbindingen, 3° de (niet chemische) verbindingen in onbepaalde verhouding tusschen twee of meer amorphe stoffen — ofschoon hij op alle doelt. Dit moet bij de lezing wel in het oog gehouden worden. De dissociatie-proefnemingen en theorie van ST. CLAIRE-DEVILLE en DEBRAY dagteekenen van 1857—1864. In 1864 kwam eerst de beroemde verhandeling van den eersten uit: *Leçon sur la dissociation*.

²⁾ II. 4—6.

³⁾ II 39 sqq.

met oplossingen van een kalizout of van een kalkzout enz. of een mengsel daarvan, wordt behandeld.

Hij kan LIEBIG en zijn navolgers (ZÖLLER, HENNEBERG, STOHMANN, BRUSTLEIN) weerleggen, die deze verschijnselen door hunne theoriën verduisterden ¹⁾ maar daarentegen aan VÖLCKER recht doen weder-
varen. Bovendien stelt de boven ontwikkelde beschouwing MULDER in staat om de eenzijdigheid, die nog aan WAY's theorie aankleefde, op te heffen ²⁾. WAY had voor die geleiachtige silikaten een verwantschapstabel opgemaakt, volgens welke de kalk in de oplossing de natron uit het silikaat verdrong (zoodat kalk en natron uitwisselden d. i. elkander substitueerden terwijl het zuur op zijne plaats bleef), vervolgens de kali de natron, en de ammoniak wederom de kali verdrong. MULDER toont aan, dat dit te ver gaat, want de verdringing is noch volledig noch eenzijdig. Zij is afhankelijk van de initiale concentratie aan silikaat en oplossing beiden, zoodat elke basis ten deele de anderen verdringen kan. De kali en de ammoniak worden wel het meest onder uitwisseling geabsorbeerd, omdat zij het sterkst gebonden worden, maar eene kalkoplossing of eene natronoplossing kan eenige kalk of natron tegen de drie andere bases uitwisselen. Steeds stelt zich een evenwicht in tusschen het geabsorbeerde en het opgeloste. De overeenkomst tusschen de verschijnselen, welke toen omtrent de zoogenaamde metamorphose der gesteenten bekend waren, en de absorbtieverschijnselen in bouw-
waarde wordt door MULDER uitvoerig aangetoond. Ook de humuscomplexen in de bouw-
waarde bezitten dezelfde eigenschappen. Zij kunnen zelfs bases aan opgeloste zouten met zwakke zuren onttrekken zooals aan karbonaten en silikaten ³⁾.

De gelatineuse silikaat- en humuscomplexen zijn alzoo naar MULDER „de opbergers en bewaarders der plantenvoedingsstoffen”, — de assimileerende en konserveerende elementen. Zeer merkwaardig schetst MULDER een zekeren initiaaltoestand van rust, waarin men zich den normalen, dus met eene zekere vochtigheid voorzien bodem kan voorstellen. „Verbleef dus hetgeen in den

¹⁾ LIEBIG kende aan de uitwisseling der bases bij de absorbtieverschijnselen nu eens waarde toe, dan weder niet (zooals MULDER aanwijst). WAY's beschouwingen verwerpende, dat de basen elkander verdringen naarmate zij sterker geabsorbeerd worden, zoo wil LIEBIG hierin „eene eigene Polizei des Bodens” erkennen, hetgeen natuurlijk door MULDER bestreden wordt.

AD. MAIER getuigt van die uitspraak van LIEBIG: „das war eine teleologische Anschauung, die sich der echten Naturforschung immer als feindlich erwiesen hat. Lehrb. Agr. Ch. II. 1. 99.

²⁾ I 49 sqq.

³⁾ II 152

„bodem voorhanden is alles te samen gemengd, dan zou er na „uitwisseling een evenwichtstoestand ontstaan tusschen alles wat „aanwezig is en scheikundig op elkander werken kan, oplosbaar en „onoplosbaar. Dan zouden er twee zelfstandig scheikundige, zeer „komplexe, groepen gevormd zijn, onderling gemengd; eene oplos- „baar, eene onoplosbaar; een soort van gesteente, door water in „tweeën deelbaar. Beide zijn zoo kompleks als er bases en zuren „in den bodem zijn ¹⁾”.

In dien toestand van rust brengen nu allerlei agentien beweging aan. Door het chemisme in den bodem worden uit de gelatineuse complexen de bases, het phosphorzuur, de ammoniak losgemaakt. Water reeds vermag daaruit van al die bestanddeelen iets op te lossen ²⁾, nog meer vermogen dat koolzuur, ammonia, zoutoplossingen, organische zuren, waarbij zich altijd de boven beschrevene evenwichten instellen tusschen oplossing en binding — zooals deze evenwichten ter eener zijde van de concentratie der oplossing en der gelatineuse stof aan oplosbare of uitwisselbare bestanddeelen, en ter anderder zijde van de bindingskracht afhankelijk zijn.

De dienst der organische stoffen in ontbinding, waarbij koolzuur, organische zuren en ammoniak ontstaan, en reduktiën plaats vinden, wordt daarom door MULDER zeer groot geacht, en uitvoerig nagegaan ³⁾.

Hij weerlegt hen, die de beteekenis der organische stoffen ontkennen of verkleinen. Zij wekken een chemisme op dat van geene anorganische stoffen kan uitgaan. De verschijnselen, die de op- en neergaande beweging van het bodemwater in den bodem voortbrengt, de verplaatsing der bestanddeelen in de complexen, de vorming van oerbanken, de vorming van eene reduktie- en oxydatielaag in den bodem, zij zijn alle toegelicht met behulp der geschetste evenwichtswetten ⁴⁾. MULDER kon eene juiste kritiek uitoefenen op de Lysimeterproeven van FRAAS ⁵⁾ en de meeningen weerspreken, die LIEBIG, FRAAS en ZÖLLER daaraan vastgeknoopt hebben; namelijk: dat deze oplossingen een beeld zouden geven van de concentratie der oplossingen in de omgeving der plantenwortels. Als in de Lysimeters (bakken die op eene zekere diepte in den grond geplaatst

¹⁾ II 19.

²⁾ VÖLCKERS proefnemingen worden inzonderheid aangehaald. II 195—203.

³⁾ II 343—392.

⁴⁾ Een voorbeeld: Als het regenwater op den bodem valt, zal het in de bovenste laag uit de zeolitische- en humus-komplexen bestanddeelen oplossen, maar in eene volgende laag zal het water anders inwerken, omdat het reeds zouten enz. bevat. Het zal oplossen of afgeven, al naarmate de laag te rijk of te arm is aan eenig bestanddeel om met het gehalte der oplossing aan dat zelfde bestanddeel evenwicht te maken. II. 253.

⁵⁾ II. 230—246.

worden) of in de drains water vloeit, dan is dit tengevolge van de regens, die snel door de aardlagen gedrongen zijn, en geen tijd hebben gehad zich met de gelatineuse silikaat- en humus-komplexen geheel in evenwicht te stellen. De samenstelling van dat water geeft dus niet aan wat in het bodemwater in den regel in oplossing is en den planten wordt aangeboden, noch wat uit den bodem in den regel wordt weggevoerd. Daarbij is bovendien voorbijgezien, dat het water zich kapillair in den bodem op en neer beweegt, afhankelijk van den verschillenden vochtigheids-toestand der bodemlagen. Op dezelfde gronden als door MULDER werden weldra daarna de meeningen van LIEBIG, FRAAS en ZÖLLER door SCHUHMACHER ¹⁾ in 1862 wederlegd.

§ II. De voeding der planten.

a. Opname in opgelosten of in nietopgelosten toestand.

Dat MULDER de meening van LIEBIG verwerpt, dat de planten de nuttigste bestanddeelen (phosphorzuur en bases) niet in opgelosten toestand uit den bodem zouden bekomen, op grond van het bindend vermogen der aarde (de absorbtie), laat zich begrijpen. Hij heeft toch aangetoond dat van die gebonden stoffen altijd een deel in oplossing moet zijn, en gedurig vernieuwd wordt naarmate de planten ze in zich opnemen en verwerken. Hij grondt zich verder, zooals thans allen doen, op de waterplanten, en op het kweken van planten in waterige oplossingen. Maar proefnemingen over eene oplossende kracht, die van de wortelcellen zelve op de gebonden bases en het gebonden phosphorzuur uitgaat, zijn MULDER nog niet bekend. Hij kan dus deze niet aanvoeren. Hij ontkent die werkingen wel niet, maar houdt ze niet voor waarschijnlijk.

Het onderzoek leerde evenwel weldra het tegendeel. In hetzelfde jaar dat MULDER's boek verscheen, publiceerde SACHS ²⁾ de welbekende proeven van de aanvreting van plaatjes marmer, dolomiet, osteoliet door de wortels van ontkiemende zaden. Hij bevond dat de uiterst dunne huid der wortelharen met eene zure vloeistof doortrokken is, die oplossend werkt op de omgeving ³⁾. In zijne proeven nam hij waar, hoe de worteltjes, na door eene daarboven liggende

¹⁾ AD. MAIJER vermeldt zulks in zijn leerboek en voegt er bij: De meeningen van L., FR., en Z. worden krachteloos door dit feit: Drainwaters en Lysimeterwaters verzamelen zich alleen in de buizen of bakken en vloeien ingeval het regent. Dan heeft de bodemoplossing geen tijd, om zich met de absorbtieve krachten in evenwicht te stellen.

²⁾ Botan. Zeit. 1860 S. 118.

³⁾ DYER meent dat dit zuur citroenzuur zoude zijn.

laag zand loodrecht te zijn doorgedrongen, zich in horizontale richting tegen het plaatje aanlegden en nevenwortels vormden, welke het plaatje op alle plaatsen van aanraking aantastten. Voorts toonde SACHS aan, hoe de wortelharen zich in de *innigste aanraking* met den bodem bevinden. De welbekende afbeelding van SACHS ¹⁾ is in alle handboeken en leerboeken overgenomen. Zij toont aan hoe ontzaggeijk groot het opzuigende oppervlak eens wortels is. Elk wortelhaar kan wel weinig opnemen en kort functionneeren (slechts weinige dagen), maar hun aantal bedraagt millioenen, die door nieuwe millioenen worden vervangen. Door het zure vocht in den wand der cellen werken zij dus oplossend op de onoplosbare zouten en op de geabsorbeerde bases en phosphorzuur. SACHS heeft dit meenen te bewijzen door zijne turfproef. Hij heeft turf phosphorzuur en kali doen absorbeeren, en zoo lang met water uitgewasschen, tot dat water niets merkbaars meer oploste. Slechts het allersterkst gebondene deel van de geabsorbeerde kali en phosphorzuur was nog in de turf aanwezig. Toen nu in deze turf, na verbrokkeling, zaden van mais, tarwe, tabak, boonen enz. werden gezaaid, konden deze tot ontkieming en volkomene ontwikkeling, met overvloeijge zaadvorming, gebracht worden, terwijl het voedingsvocht slechts chloruur, sulfaat en nitraat van kalk en magnesia maar geen kali en geen phosphorzuur bevatte. SACHS leidt daaruit af, dat de zure vloeistof in den wand der opzuigende cellen de sterkst geabsorbeerde kali en phosphorzuur tot oplossing heeft gebracht en heeft moeten brengen, zoude de plant kali en phosphorzuur ontvangen. ²⁾

De vereischte hoeveelheid voedsel en de gang der stofwisseling in de plant vielen buiten het bestek van MULDER'S werk. Hij behandelt alleen de opname van voedsel in het algemeen ³⁾ door de opzuiging van het water en de daarin opgeloste bestanddeelen, zooals deze toen verklaard werd door de osmose en door de chemische werking in de plant zelve ⁴⁾, waardoor minerale bestanddeelen worden vastgelegd in de organen, en opslurping van nieuwe hoeveelheden wordt bevorderd. Maar van de osmotische verschijnselen met betrekking tot de opgeloste stoffen, die uit het water door de vliezen heen-

¹⁾ SACHS, Vorles ü. Pflanzenphysiol. S. 239 2te Aufl. 1887.

²⁾ Ik wil die bewering niet tegenspreken, maar ik moet toch opmerken dat SACHS hier de wisselwerking van opgeloste bestanddeelen op geabsorbeerde bestanddeelen, door MULDER zoo sterk op den voorgrond gebracht, geheel voorbijziet. De bodem werd gedrenkt met eene zoutoplossing, die door uitwisseling de geabsorbeerde kali en phosphorzuur in oplossing kan brengen — zij het dan in geringe mate — als zuiver water zulks niet vermag. Is het geheel zeker dat het bedrag daarvan niets te beteekenen heeft?

³⁾ III. 131—188.

⁴⁾ III. 137.

dringen, waren toen nog alleen de proeven over dialyse door GRAHAM (van 1855) bekend ¹⁾. Hij kon nog niet weten dat de oplossing in de wortelcellen zich veel meer verrijkt uit de bodemoplossing dan aan den regel van DE SAUSSURE ²⁾ beantwoordt, en dat vooral kali, ammoniak, salpeterzuur zoo sterk osmotisch inwerken.

b. Kunnen organische stoffen tot voedsel dienen.

Of ook organische bestanddeelen van den bodem (zouten van humusachtige zuren enz.) in de planten worden opgenomen, was toen nog een brandend vraagstuk, omdat men de humus als eene onmisbare voedingsbron voor de planten had beschouwd. LIEBIG beweerde steeds, dat hij aan deze dwaling een einde had gemaakt; hij en zijne aanhangers ontzegden alle beteekenis aan de organische stoffen als voedsel voor de koolstof in de planten en namen alleen mineraal voedsel aan. MULDER wikt zorgvuldig alle proefnemingen ter bevestiging en ter bestrijding. Hij toont geschiedkundig aan, dat ook de voorgangers het nut en de beteekenis van mineraal voedsel erkend hebben, al schreven zij ook aan de humus eene voedende kracht toe. Trouwens LIEBIG zelf deelt mede, dat acidum uricum uit eene oplossing door de planten wordt opgenomen ³⁾. Toch acht MULDER onze kennis nog veel te armoedig om den dienst der organische stoffen van den bodem ook in dit opzicht voldoende toe te lichten, zoodat het mogelijk blijft dat oplosbare humusverbindingen (humaten, krenaten, apokrenaten) in de wortels opgenomen worden en tot voedsel kunnen dienen. Thans wordt dit niet meer betwijfeld ⁴⁾, al is niet streng bewezen, dat de wortels der planten, door het vocht der celwanden, bij die opname en toeëigening (Assimilatio) *geene* gistende of oxydeerende werking op de humus-

¹⁾ MULDER bepaalt zich tot deze zinsnede: Naar GRAHAM (Ann. de chimie et de Phys. [3] XLV, 5) is de osmose voor een aanzienlijk deel het product van reaktie tusschen de poreuse wanden of vliezen en de osmoseerende stoffen. III. 143.

²⁾ DE SAUSSURE leidde (1804) uit zijne proefnemingen af, dat de wortels uit eene zoutoplossing meer water dan zout opslurpten, zoodat de oplossing sterker werd.

³⁾ II. 439.

⁴⁾ Ofschoon sommige oplosbare humusstoffen niet door organische vliezen diffundeeren (DETMER 1871), zijn er andere die wel diffusiebel zijn (PETERMAN 1882). De zeer gunstige werking van humuszure kalk in waterige oplossing bij waterkulturen is nog onlangs door BRÉAL (1894) waargenomen. Voorts wordt thans erkend dat chlorophyllvrije plantenparasieten (sommigen zelfs die chlorophyll bevatten zooals *Viscum album* *Melampyrum*) organisch voedsel verbruiken. Sommige groene planten behoeven eenen aan organische stoffen rijken bodem. Hoogstwaarschijnlijk kunnen vele planten zich met enkel organische, zoowel als met beide voeden. Kiemplanten kunnen volgens v. TIEGHEM's proeven zich met organische stoffen, die hun aangeboden worden, voeden. Ook de opname en toeëigening van stikstofhoudende organische stoffen (amidachtige verbindingen) door sommige planten is bewezen. (Zie MAIJER's Lehrbuch der Agricultur Chemie. I. 79—82).

stoffen uitoefenen. Is die opname van humusstoffen voor onze kultuurplanten van geringe beteekenis (AD. MAIJER), voor woudboomen beteekent zij des te meer. Hoogst belangrijk is de ontdekking van B. FRANK (1885, 1894), dat bij Cupuliferen en Coniferen de boschhumus tot voedsel dient, ten gevolge eener symbiose van zwammen met de wortels dier boomen. ¹⁾

c. Bronnen der stikstofvoeding.

Een tweede brandend vraagstuk betrof toen de *bronnen voor de stikstofvoeding* der planten. LIEBIG kende zich de eer toe, dat hij de ammonia in den dampkring als de *eenige* oorspronkelijke bron ²⁾ voor de stikstof in de planten had aangewezen ³⁾. De stikstof der lucht kon dus geen plantenvoedsel zijn. De beroemde proeven van BOUSSINGAULT, toen reeds bekend, schenen het vermogen daartoe aan de luchtstikstof geheel te ontzeggen. VILLE was de eenige die het tegendeel vol hield. MULDER erkent dat zijne eigen proeven (van 1845) welke eene opname van vrije stikstof aantoonde, te onnauwkeurig waren om die uitkomst te bewijzen, doch acht het evenzeer onbewezen dat de luchtstikstof op geenerlei wijze aan de plantenvoeding kan deelnemen. Hij hecht gewicht aan de proefnemingen van VILLE, al acht hij ze vooralsnog onvoldoende. Hij wijst vooral daarop, dat naar LAWES en GILBERT ⁴⁾ de Leguminosen de beste vóórvruchten voor de tarwe zijn, ofschoon zij zelve weinig behoefte aan eene stikstof-bemesting hebben, en dat VILLE ⁵⁾ den bodem, na een gewas van Erwtten of Boonen, rijker aan stikstof gevonden heeft. Hij vraagt zich daarom af, of ook soms de Leguminosen een bodem achterlaten, waarin de stikstofhoudende humus

¹⁾ De zwammen zijn organisch vergroeid met de wortels, met name de jongste zuigwortels, zoodat deze met een zwammantel omgeven zijn (eene Mikrorhiza) en wortelharen missen. De zwammen behooren waarschijnlijk tot de Tuberaceae (truffels) of Hymenogastres. Zij voeren voedsel toe en zijn humuseters. Op een normalen goeden pijnboomen-grond behoeven deze boomen de wortelzwammen ter vorming van deze mikrorhizae en voor hunne goede ontwikkeling. Dit verschijnsel is waargenomen bij pijnboomen (sparren, dennen), haagbeuk, hazelnoot, beuk, eik, kastanje, wilg, popel. Het komt voor, mits in boschhumusgrond, in alle gronden, streken, leeftijden en aan alle wortels. Daar in die wortels salpeter ontbreekt, die anders wel in de zuigwortels aanwezig is, zoo is het hoogst waarschijnlijk — zoo niet zeker — dat de zwammen vooral stikstofhoudend voedsel aanvoeren.

²⁾ Sekundair zou de stikstof dus voorhanden zijn in de ammonia door rotting van stikstofhoudende organische stoffen ontstaan, of in het salpeterzuur uit de ammonia door oxydatie gevormd.

³⁾ MULDER toont aan, dat DE SAUSSURE reeds in 1804 op de beteekenis van die ammoniak gewezen heeft.

⁴⁾ III. 56.

⁵⁾ III. 106 sqq.

zoo gewijzigd is, dat de stikstof toegankelijker voor de tarwe geworden is, — en bovendien ontkent hij de mogelijkheid niet *dat de luchtstikstof onder bepaalde omstandigheden aktief kan gemaakt worden en aan de voeding deelneemt*. Hij kan daarvoor wel niets anders bedenken dan eene oxydatie derzelve door Ozon, of door op andere wijze aktief geworden zuurstof ¹⁾, maar het vraagstuk laat hij open. Hoe wijs hij daarin gezien heeft, is nu gebleken. HELLRIEGEL heeft het vraagstuk opgelost. In Symbiose met eene bakterie schuilt in de wortelknolletjes der Leguminosen en in andere planten het vermogen om de luchtstikstof te assimileeren. Daarom hebben de Leguminosen geene bemesting met ammonia of salpeterzuur noodig; daarom laten zij den bodem met stikstofverbindingen verrijkt achter.

HOOFDSTUK II.

De praktische vraagstukken.

Zich grondende op de door hem ontwikkelde inzichten omtrent de samenstelling en het chemisme des bodems, en deze kritisch verbindende met de praktische ervaringen en gedane kultuurproeven heeft MULDER de vraagstukken toegelicht, die voor den praktischen landbouw van belang zijn — zooals: „Waarin bestaat de vruchtbaarheid van den grond? Wat leeren de grondanalysen? Waar door wordt een bodem onvruchtbaar voor een bepaald gewas (de uitputting)? Waardoor wordt de vruchtbaarheid hersteld, en welke is de werking der meststoffen? Welke waarde hebben bemestingsproeven? Welke is de beteekenis van de braak, van ploegen en omwoelen, van den wisselbouw? Waarin bestaat het ontginnen van een nieuwen bodem?

A. De vruchtbaarheid.

Uit het boven aangevoerde is het duidelijk, dat MULDER de vruchtbaarheid in de eerste plaats toeschrijft aan eene ruine hoeveelheid van de gelatineuse complexen der silikaten en humusstoffen, en aan het gehalte derzelve aan gebonden (geabsorbeerde) kali, ammonia, kalk, magnesia, natron, phosphorzuur. Zijn zij rijk daaraan, dan kunnen zij reeds aan water veel afstaan — nog meer door chemische agentien, als koolzuur, humuszuren, orga-

¹⁾ III. 126. Wij zouden thans zeggen door geaktiveerde zuurstof.

nische zuren — en door uitwisseling met zoutoplossingen aan deze bases afstaan. Voorts, alles wat de genoegzame verspreiding van oplosbare stoffen, de noodige oxydatien, het in chemische beweging stellen, de goede rotting of gisting in humusstoffen en in organischen afval bevordert, draagt tot de vruchtbaarheid eens bodems bij. Ten slotte, de physische toestand van den grond, hare losheid, hare poreusheid, hare kapillariteit, dus het vermogen om gasen op te slurpen, water vast te houden en door te laten — dit alles bepaalt evenzeer de vruchtbaarheid.

De humus, als een groote faktor der chemische beweging, wordt door MULDER in hare oude eer hersteld, nadat zij, zooals hij zegt, door LIEBIG was doodgemaakt. Niet alleen omdat zij koolzuur bij hare rotting voortbrengt, maar ook omdat zij ammoniak en bases in hare gelatineus kompleks opneemt, omdat zij organische zuren vormt, die weder oploosend op de geleiachtige silikaten werken, en om nog zooveel meer hetgeen wij nog niet *voldoende* weten, maar moeten vermoeden.

De praktijk niet alleen, maar ook het wetenschappelijk onderzoek heeft MULDER's meeningen bijgevallen, ofschoon dit zelden of niet erkend wordt. Thans wordt de humus als een integreerend en onmisbaar bestanddeel van den bodem beschouwd, die alle bodemdeeltjes doordringt en bekleedt. L' humus est le quatrième élément constitutif de la terre arable schrijft DÉHÉRAIN (1898). *Die Erhaltung und Vermehrung des Humusgehaltes muss in der Mehrzahl der Fülle als eine der wichtigsten Aufgaben der Bodenkultur betrachtet werden*, met die woorden besluit WOLLNY zijne uitvoerige beschouwingen over het voorkomen, de samenstelling, de werkingen van de humus. Haar nut betoogt hij op dezelfde gronden als MULDER, en voegt er nieuwe bij ¹⁾. De vruchtbaarheid des bodems staat in rechtstreeks verband met de humusvorming, zegt

¹⁾ WOLLNY voert aan: 1° *Voor de chemische werkingen*: Humusstoffen (zooals bijv. zoogenaamde humuszure ammonia) kunnen minerale stoffen (zelfs phosphorzuur) vastleggen, bases aan zouten ontnemen en op die wijze nuttige bestanddeelen tegen de oploosende kracht van het regenwater in den bodem bewaren. Anderzijds gaan van humuszuren weder oploosende werkingen uit op silikaten en phosphaten; zooals ook van de ontbindingsprodukten van den humus, het koolzuur, de ammoniak. Hierbij worden aangehaald de onderzoekingen van GRANDEAU, SIMON, EICHORN, DIETRICH, SENFT (1872, 1875, 1877). Zie ook het onderzoek en de beschouwingen van H. SNYDER. C. Bl. Agr. Ch. (1898) 27. 654.

2° *Voor de physische werkingen*: De humus vermindert de te sterke aankleving der deeltjes en alzoo den scheidingsweerstand, die bij ploegen, eggen enz. te overwinnen is. (PUCHNER, SCHACHASIAN 1889, 1890). Zij maakt zware bodems doorlatender, ligte bodems waterhoudender. Zij verbindt zand en klei tot gekruimelde aarde en vormt dus lossere aggregaten (SCHLOESING). Zij vereffent de temperatuurswisselingen in den bodem, omdat zij de verwarming zoowel als de afkoeling tempert. Zij bevordert wat men noemt de

de Amerikaan HARRY SNYDER (1897). En toen de werking der regenwormen ¹⁾ was in het licht gesteld, door wier ingewand als het ware de aarde der gansche bouwlaag doorgaat, erkende men hoezeer die wormen bijdragen, om de overblijfselen der plantenblaadjes, -stengels, -wortels tot gezonde humus te maken en de aarddeeltjes daarmee te bekleeden ²⁾. Welke belangrijke faktor het leven der mikro-organismen voor de vruchtbaarheid des bodems is, was in 1859 nog onbekend. Eerst in 1860, na de voltooiing van MULDER's werk, kwam PASTEUR's beroemde verhandeling in het licht ³⁾, waarin hij de kiemen van lagere organismen, welke overal in de lucht aanwezig zijn, als de oorzaken van gisting en rotting (door de Anaerobien) en van vertering (door de Aerobien) aanwees. En het duurde tot 1877 eer SCHLÖSING en MÜNTZ en later WARINGTON de salpetermining door de werking eener bakterie verklaarde, die de luchtzuurstof op de ammoniak overdroeg. Wel allerminst dacht men toen aan de mogelijkheid, dat vele der laagste plantaardige organismen en bakteriën, in symbiose met plantencellen, de luchtstikstof in chemische verbinding zouden kunnen brengen. Maar daarom kan men thans te meer waardeeren, dat MULDER steeds aandrong om bij alle vraagstukken der Agrikultuurchemie *het onderzoek physiologisch op te vatten* en zelf daarin trachtte voor te gaan. „*Eene gezonde Agrologie is Physiologie*” ⁴⁾.

Bij deze beschouwingen wordt MULDER niet moede om de uitspraak gedurig te herhalen: „Niet het *quantum* maar het *quale* geldt”. Het is niet genoeg dat er kali, phosphorzuur, ammonia enz. in den bodem zijn, maar zij moeten in de gelatineuse kom-

„Gahre” des bodems, d. i. een zekeren graad van losheid met daaraan gepaard vochtigheidsgehalte en gehalte aan organische bestanddeelen, welke toestand voor het chemisme (dus ook voor de gisting in de organische deelen) het gunstigste is.

¹⁾ Door de proeven van DARWIN en anderen is het toch gebleken dat de aarde, die door de regenwormen als voedsel wordt gebruikt en weder uitgeworpen, met het vocht hunner spijsverteringswerktuigen (dus met fermenten) wordt doortrokken. De organische deelen worden daardoor tot een humus, die meer gistingsproducten en meer minerale stoffen in oplossing geeft dan de aarde, welke niet door de wormen is heengegaan. Ook de mieren en andere dieren dragen tot de humusvorming bij. Zie WOLLNY's werk: *Die Zersetzung der organischen Stoffe und die Humusbildung mit Rücksicht auf Bodenkultur* (1897). S. 33—43.

²⁾ Ik kan niet nalaten hier te vermelden, dat in December 1868 de bekende Dr. BROERS te Utrecht mij in een gesprek opmerkzaam maakte van hoeveel belang het zou zijn om in plaats van chemische analyses te doen, eerst eens nauwkeurig het dierenleven in den bodem te bestudeeren. Hij had vele waarnemingen gedaan, die hem van het gewicht van dat dierenleven overtuigd hadden.

Ik vermoedde toen niet, hoe juist Dr. BROERS gezien had en dat een twaalfstal jaren later eene reeks van de belangrijkste ontdekkingen op dat gebied zou aanvangen.

³⁾ C. R. 50, 303, 849.

⁴⁾ III. 434.

plexen (silikaten en humus) gebonden zijn: in gunstige hoeveelheid, in gunstige verhouding, in gunstigen toestand, teneinde zoowel genoegzaam gebonden te zijn om niet door de regens uitgespoeld te worden, als genoegzaam toegankelijk om de planten in eene groeiperiode voldoende te verzorgen. De vereischte hoeveelheid bases, phosphorzuur enz. moet in de vereischte concentratie aan de planten aangeboden worden, en daarvoor moet de chemische beweging krachtig genoeg zijn. Voortdurend verzet MULDER zich dus tegen de plumpe quantiteitsleer, die toen de Agrikultuurchemie beheerschte. Deze gaf slechts acht op de geheele hoeveelheid kali, phosphorzuur, stikstof enz., en liet het quale buiten beschouwing.

De humus kan in een vruchtbaren toestand zijn, als zij in een zekere chemische beweging is, maar evenzoo onwerkzaam of zelfs schadelijk. De stikstof, in de humus bevat, kan voor een grooter of slechts voor een kleiner deel toegankelijk zijn, voor zooverre zij in ammoniak of andere oplosbare verbindingen overgaat, die de plant kan opnemen ¹⁾. Ook dit wordt thans algemeen erkend ²⁾.

Omdat wij nu van die gunstige samenstelling van de gelatineuse stoffen, en van het chemisme in dezelve (de niet aflopende reaktiën, de oplossingen, de uitwisselingen, de gistingen enz.) nog zoo weinig af weten, acht MULDER de grondanalysen, waarin op zoo gebrekkige wijze alleen het quantum bepaald wordt, van weinig waarde. Hij acht ze nog op het standpunt van 1814 (bodemanalysen van DAVIJ) te staan, en geheel onvoldoende; in het bijzonder om de vruchtbaarheid van een bodem voor een bepaald gewas, zooals kina, koffie- suikerriet te bepalen. Al kunnen wij eenigszins bepalen hoeveel losse zouten (sulfaten, chloruren, nitraten, koolzure kalk) voorhanden zijn, en met zoutzuur de hoeveelheid gelatineus silikaat en de daarin gebonden bases trachten te benaderen, wij kunnen niet bepalen, hoeveel in het gelatineuse deel beschikbaar is voor een

¹⁾ Zie: Over den aard der stikstofverbindingen, III. 28.

²⁾ Zoo zeide nog onlangs (1898) DÉHÉRAIN: „Ten onrechte heeft LIEBIG den stikstofhoudenden mest willen verbaunen, omdat de bouwaaide zooveel stikstof bevat.” Hij haalt daarvoor een sprekend voorbeeld aan. In een akker te Limagne in Auvergne bevat de bodem in 1 M. dikte \pm 30 000 kilo gebonden stikstof op den bunder. Eene beetwortelengroei behoeft slechts 100 kilo. Toch moesten op dit veld 300—350 kilo Chilisalpeter aangebracht worden om eene hooge opbrengst te verkrijgen. Daarvoor was dus niet genoeg beschikbare stikstof in den bodem voorhanden. (*Revue des deux mondes* 1898, 640—673). Het is merkwaardig, dat nog in 1898 een Fransch landbouwkundige het noodig vindt om in eene populaire verhandeling tegen LIEBIG's theorieën op te komen. Zulk een lang leven hebben de wetenschappelijke dwalingen, die tot de dogmata eener School behooren.

volgend gewas. En daarop komt het toch aan! Voorloopig acht MULDER het beste om de korrelige deelen (die losheid geven) en de fijne deelen (die vastheid geven en water binden, de eigenlijke klei), te onderscheiden van het geleachtige silikaat dat in verdunde zuren oplosbaar is. Voor dit laatste zou dan eene herhaalde uittrekking met slap, vervolgens met toenemend sterk zoutzuur aan te bevelen zijn.

De toekomst heeft MULDER gelijk gegeven. Ofschoon nog lang vele analyses op het oude standpunt bleven staan, werden toch allengs de verschillende bestanddeelen beter onderscheiden, en werden de zooeven beschreven benaderingen toegepast (uittrekking eerst met water, dan azijnzuur, dan slap zoutzuur of salpeterzuur, sterk zoutzuur, zwavelzuur, enz. ¹⁾).

Doch nog heden moet men erkennen dat men nog niet in staat is het dadelijk *beschikbare* te bepalen, noch op deze wijze, noch door zogenoemde absorbtieproeven ²⁾. Wat deze laatste betreft, terecht komt MULDER — en op juiste gronden — reeds op tegen LIEBIGS voorschrift hetgeen hij eenzijdig en onjuist acht, om uit de absorbtieproef ³⁾ met een kalizout de vruchtbaarheid van een bodem af te leiden, op grond daarvan dat elke bouwgrond een zeker, door een getal uitdrukbaar, vermogen zou bezitten om kali te binden ⁴⁾.

Wat echter de samenstelling des bodems in het algemeen betreft, zoo wordt thans erkend, dat zij bestaat uit deeltjes, waarvan elk een aggregaat is van 1° zand (quarts en onverweerde silikaten), 2° klei, 3° een kompleks van in zuren oplosbaar gelatineus silikaat en van humus en (zoo deze aanwezig is) koolzure kalk in innige menging ⁵⁾. De quantitatieve verhouding waarin deze tot elkander staan ⁶⁾,

¹⁾ Zie: mijne Bodenuntersuchungen in den Niederlanden (1866) Landw. Vers. Stat. VIII. 235—306. Unters. von Thonboden in neuen Alluvien in den Niederl. und von vulkanischen Böden in Deli u. s. w. L. V. St. 1890. S. 239—278. Die Zusammensetzung der Ackererde nach Anleitung der in den vorigen Abhandlungen mitgetheilten Analysen. S. 347—373.

²⁾ AD. MAYER verklaart in zijn Lehrb. der Agrik. Chemie 4te Auflage (1895) S. 110/111: „Wir besitzen noch immer kein zuverlässiges Mittel die für das Pflanzenwachstum in einer Vegetationsperiode verfügbare Stoffe voraus zu bestimmen.“ Wat de waarde van eene Absorbtieproef betreft, maakt hij opmerkzaam, dat vele nuttige, niet rechtstreeksche meststoffen juist eene verzwakking van het Absorbtievermogen des bodems bewerken.

³⁾ d. i. Te bepalen: hoeveel kali een bepaald gewicht van een bouwgrond uit een bepaald volumen van een kali-oplossing van bepaalde sterkte opneemt. LIEBIG kende bij zulke proeven geene waarde toe aan de basesuitwisseling.

⁴⁾ III. 158.

⁵⁾ SCHLOESING noemt: *ameublir*, het bekleeden der zanddeeltjes met klei, humus-silikaten-komplex, koolzure kalk.

⁶⁾ Zij moeten elkander als het ware in evenwicht houden. De gunstigste verhouding der hoeveelheden zand, klei, geleachtig silikaat en humus vormt den vruchtbaarsten bodem.

en de samenstelling van gelatineus silikaat en humus, bepalen grootendeels de vruchtbaarheid, zoowel chemisch als physisch. Zoo hangen daarvan af: de korreligheid, de losheid, het vermogen om water zoowel te absorbeeren als door te laten, het vermogen om de voedingsbestanddeelen zoowel te absorbeeren en vast te houden, als om ze den planteu af te staan. Mag men niet in deze inzichten de natuurlijke ontwikkeling van MULDER's denkbeelden erkennen?

B. Het verlies aan vruchtbaarheid — de uitputting.

De quantiteitsleer, door LIEBIG gevolgd, kan ook hier het allerm minst baten ter verklaring, al is het natuurlijk *geheel in het algemeen waar*, „dat daar, waar steeds afgaat en niets bijkomt, de rijkdom vermindert ¹⁾”. Maar dat eene vermindering van vruchtbaarheid (eene uitputting) alleen evenredig zoude zijn aan eene vermindering van kali, phosphorzuur enz., dus aan de anorganische stoffen, die de planten uit den bodem opnemen en terughouden, dat bestrijdt MULDER. De oorzaken moeten vele zijn. Wat de chemische oorzaak betreft, die moet niet alleen in een tekort aan kali, phosphorzuur enz. maar vooral in hunne te geringe beschikbaarheid bestaan. De gelatineuse verbindingen hebben plaatselijk aan gemakkelijk oplosbare bestanddeelen verloren. Het silikaat moet hersteld worden. Er kan kali, phosphorzuur genoeg zijn, maar zij kunnen te moeilijk in chemische beweging te brengen zijn. Dat er kali-, kalk-, kieselzuur-planten zouden zijn (LIEBIG), dat één basisch bestanddeel zulk eene beteekenis voor de ontwikkeling der plant zoude hebben, dat de anorganische bestanddeelen zulk een overwegenden rol zouden spelen, — dat acht MULDER ongerijmd ²⁾. Hij neemt dus ook niet aan, dan in zeer beperkte mate, dat de grond minder vruchtbaar wordt voor een gewas, omdat zij voor eene plant, die men eene kalkplant gelieft te noemen, te weinig kalk bevat — voor eene andere kaliplant, die men eene kaliplant acht te zijn, te weinig kali. Nog veel meer verwerpt hij, dat de plant schadelijke uitwerpselen zoude afscheiden, die op den duur den bodem voor haar zouden bederven, zooals LIEBIG dat wel eens beweerd heeft.

Het is geheel onjuist, dat men uit de berekening van hetgeen een gewas aan anorganische bestanddeelen uit den bodem wegvoert — of wel uit eene analyse des bodems vóór en na een gewas — zou kunnen afleiden hoeveel die bodem in vruchtbaarheid is afge-

¹⁾ III. 424.

²⁾ III. 329.

nomen (Proefnemingen van MAGNUS). Gronden immers die voor verschillende gewassen waren uitgeput, werden alle door een en denzelfden stalmest in vruchtbaarheid hersteld ¹⁾.

Een voortdurende bouw van hetzelfde gewas, gedurende eene reeks van jaren op denzelfden bodem, acht hij dus zeer goed mogelijk, indien de goede physische toestand en de chemische beweging daarin onderhouden worden, zooals niet alleen de proefnemingen van GILBERT en LAWES, maar ook de ervaringen in zoovele oorden bewijzen ²⁾.

Er moeten dus nog andere oorzaken zijn voor het zoogenaamde uitbouwen der akkers ³⁾ voor een bepaald gewas, dan enkel een te kort aan nuttige minerale bestanddeelen ⁴⁾ door een vroeger gewas ontstaan.

De chemie staat hierbij verlegen. LIEBIG's uitspraak: „die Dauer „der Fruchtbarkeit eines Feldes steht im Verhältniss zu der Quantität der Bodenbestandtheile; die Erschöpfung steht im geraden „Verhältniss zu dem Theil dieser Quantität, welche der Boden „jährlich zu einer Ernte abgegeben hat”; deze uitspraak, die weder alleen het quantum betreft, leidt op een dwaalspoor. MULDER wijst op de onkruiden en parasieten die vernietigd moeten worden. Deze kunnen oorzaak zijn dat een veld een bepaald gewas moede wordt. *Lucerne wordt soms aangetast door een parasiet, die de wortels vernietigt, en zich overplant op een spoedig opvolgend gewas van lucerne.* Tabak en andere planten zijn vergezeld door hare eigene onkruiden, en hare voortgezette kultuur wordt daardoor gekweld. Bovendien planten zich bepaalde insekten in den bodem bij voorkeur voort bij de aanwezigheid van bepaalde gewassen. Andere planten groeien regelmatig jaarlijks op hetzelfde veld voort, zooals aardappelen, beetwortelen, kool, boonen. Tarwe kan bij voortgezette kultuur slecht gedijen, maar zij kan ook 20—40 jaar achter elkander volgen. Zoo men het onkruid in den zomer verstoren kan, is aan den tarwebouw een betere uitslag verzekerd ⁵⁾.

Hoe juist MULDER in dit alles gezien heeft, is later gebleken. Meer en meer hebben de waarnemingen geleerd, dat onkruiden en parasieten oorzaken zijn van onvruchtbaarheid en van het moede worden van den bodem voor een bepaald gewas. Ik behoef slechts te wijzen op het klassieke onderzoek van den op dit gebied het

¹⁾ III. 384—405.

²⁾ IV. 244. Tarwebouw gedurende 20—40 jaren (DE GASPARIN).

³⁾ III. 400.

⁴⁾ III. 251.

⁵⁾ IV. 243—246.

meest beroemden KÜHN, die de oorzaak der „Rübenmüdigkeit” van een veld gevonden heeft in de voortplanting eener Nematode, en die in het kweken van „vangplanten” het geneesmiddel heeft ontdekt ¹⁾).

C. Herstelling der vruchtbaarheid. Bemesting.

De herstelling en onderhouding der vruchtbaarheid is op het standpunt van MULDER niet alleen door bemesting te verkrijgen, maar door het onderhouden van al de gunstige physische en chemische toestanden die boven geschetst zijn.

De bemesting kan niet alleen tot doel hebben, om het verlies van anorganische stoffen te dekken, en bovendien wat meer gebonden stikstof aan te voeren dan de bodem zelf (als ammoniak) uit de lucht trekt gedurende den duur der groeiperiode. Men moet haar uit een ruiner oogpunt beschouwen. Het bemesten van een land dat in kultuur moet gebracht worden is: het *vormen* van een geleiachtig silikaat-humeusdeel. Het bemesten van een kultuurbodem is het *onderhouden* daarvan.

De mest dient niet alleen om het quantum aan te vullen maar ook het quale te verbeteren. Absorbtie, inzonderheid die met uitwisseling der bases, is de hoofdzaak. De mest moet niet alleen het gelatineuse deel verrijken, maar ook zulk eene metamorfose in hetzelfde bewerken, dat de nuttigste bestanddeelen (kali, phosphorzuur enz.) daaruit loskomen. *De mest bemest den grond, niet de planten.* Men moet dus niet met LIEBIG het woord mest door het woord voedingsmiddelen vervangen. De toestand in den bodem, niet alleen de voorraad, moet uitgangspunt zijn ²⁾. De schrale quantiteitsleer kan hier niet helpen en voert tot dwalingen.

Door LIEBIG en zijne navolgers is voorzeker erkend dat de organische mest koolzuur en ammonia voortbrengt, die oploosend en daardoor nuttig werken; ook is door hem aan eene bemesting met gips de beteekenis toegekend om ammoniak te binden; en aan keukenzout en ammoniakzouten om oploosend op de phosphaten in den bodem te werken ³⁾; doch MULDER acht al deze verklaringen eenzijdig en gebrekkig. Want de metamorfose van het geleiachtig silikaat- en humeuse bestanddeel des bodems moet hier in de eerste

¹⁾ Zie C.blatt. f. Agric. Ch. (1880) IX 859 en (1883) XII, 67. Als Brassica Oleracea op zulk een veld in April wordt gezaaid dan kruipen de larven in hare wortels. Worden 4—5 weken later deze planten uitgehaald en op een hoop te rotten gezet, dan worden de aldus gevangen Nematoden vernietigd.

²⁾ III. 426—428.

³⁾ IV. 119—135.

plaats in het oog gehouden worden, en de organische zuren van den bodem en den mest zijn evenzoo oplosmiddelen. Zouten in den mest, zooals ammoniakzouten, gips enz. brengen substitutiën voort, waardoor kali, magnesia enz. in het bodemvocht treden. Als men mest met ammonia, kalkzouten enz., kan de nuttige werking in een vrijworden van kali bestaan.

Voor elke meststof, minerale en organische, gaat dus MULDER de mogelijke werkingen na, zooals die toen waren na te speuren ¹⁾; vooreerst wat zij waard zijn door haar gehalte aan nuttige bestanddeelen — ten tweede voor de opbouw van het geleachtige silikaat-humus-komplex — ten derde voor het onderhoud der chemische beweging ²⁾.

Hij trekt daaruit het gevolg dat eene algemeene aanprijzing van eene meststof niet mogelijk is. Immers bovengenoemde werkingen hangen af en van den toestand van elken bodem en van het te verbouwen gewas. Wat voor één gewas of éenen akker nuttig is, kan minder nuttig zijn of nutteloos voor een anderen grond of een ander gewas. Ook hebbe men in het oog te houden den tijd wanneer en gedurende welken de nuttige werking van den mest (aanvoer en losmaking) voor het gewas moet uitgeoefend worden. Daarom hebben tot nog toe de bemestingsproeven zoo weinig licht gegeven, en bezitten zij zoo weinig waarde. Zij golden slechts voor de toestanden, onder welken zij genomen werden, en die toestanden zijn nog weinig of niet bekend.

Het valt MULDER dus gemakkelijk aan te wijzen, waarom LIEBIG's welbekende minerale kunstmest ³⁾ volkomen mislukt is; die mest

¹⁾ IV. 2—96.

²⁾ Een voorbeeld: Eene bewerking met ammonia of ammoniakzout (door LIEBIG in 1846 en 1856 meestal onnoodig verklaard, omdat de lucht genoeg ammoniak levert) acht MULDER niet alleen nuttig omdat zij veel chemische beweging veroorzaakt, door substitutie in het complex, en kali enz. losmaakt, maar ook om de ammonia zelve.

De bewering van LIEBIG daarentegen, dat een acre die 10 000 pond stikstof, op 10 duim dikte, bevat, niet door 30—60 pond ammoniak tweemaal zoo vruchtbaar kan gemaakt worden, is ongegrond. Waarom zou dit niet mogelijk zijn, vraagt MULDER, wanneer deze ammonia substitueerend en oplossend werkt. IV. 103.

Een quantitatieve analyse van organischen mest ter bepaling van C, H en N gehalte, zooals dit toen wel gedaan werd, verwerpt hij natuurlijk, omdat deze niets leeren kan betreffende hetgeen daaruit door chemische beweging (rotting, gisting enz.) als oplosmiddelen en als voedsel kan vrij worden. (IV. 151).

³⁾ LIEBIG had 16 morgen slechten grond met zijnen mineralen kunstmest bemest. Vier jaren bleven de goede vruchten uit. Eerst stalmest kon de vruchtbaarheid herstellen en toen hadden de kosten f 8000 bedragen (1855). De oude landbouw, zegt MULDER, zou dit voor veel minder gedaan hebben. IV. 313. Alle landbouwers die dezen kunstmest aanwendden, bevonden dien onwerkzaam. LIEBIG heeft dit later moeten erkennen, maar hij schreef het aan verkeerde oorzaken toe.

berustte op het beginsel, dat slechts de verarming aan minerale voedingstoffen te vergoeden is; de chemische beweging in den bodem bleef daarbij buiten beschouwing. Evenzoo kon MULDER op grond zijner beschouwingen betoogen, dat men van de ervaring van alle tijden niet behoeft af te wijken: *dat stalmest de beste is*; en dat een kunstmest eerst dan daarmede gelijk staat, als zij al dezelfde werkingen uitoefent, en zoowel in het quantum als in het quale de vruchtbaarheid onderhoudt ¹⁾.

Die uitspraak van MULDER wijkt niet af van de meeningen, die thans in de wetenschap gehuldigd worden. Op alle gronden die niet sterk humeus zijn, zegt WOLLNY (1897) wordt de hoogste opbrengst slechts dan verkregen als men mest aanwendt, die rijk is aan organische stoffen. Zelfs kan door te rijke bemesting met mineraalmest de toestand des bodems verslechterd worden. Eene waterige oplossing van chloruren, sulfaten, nitraten doet de klei wel koaguleeren (kruimelen), maar als zij uitgespoeld zijn slibt zich de aarde juist dichter ineen (AD. MAYER, HILGARD) ²⁾. Daarom kan eene eenzijdige salpeterbemesting schadelijk zijn en wordt dat nadeel door meerdere humusvorming hersteld.

MULDER's beschouwingen over vruchtbaarheid en over meststoffen waren toen van veel beteekenis. Zij zijn het ten deele nog. Nog lange jaren heeft de plompe quantiteitsleer in de hoofden der zogenaaande wetenschappelijke landbouwers en der landbouwonderwijzers gespookt, nadat zij zich tusschen 1840 en 1860 een weg had gebaand in de wetenschap en in de landbouwkringen dieper en dieper was doorgedrongen. De leer van kali-kalk-kiezelzuur-planten heeft zich nog lang doen gevoelen. Veel langer echter de leer, dat eene vermindering van vruchtbaarheid rechtstreeks aan het verlies van minerale bestanddeelen is toe te schrijven en dat eene chemische analyse kan aanwijzen wat in de bemesting moet aangevoerd

¹⁾ Zij moet:

1°. Eene voldoende hoeveelheid minerale bestanddeelen bevatten.

2°. Bij ontbinding ammoniak ontwikkelen, die zorgt, dat de aangevoerde minerale bestanddeelen geen dood in den bodem vastgelegd kapitaal blijven, maar door de uitwisseling der bases in beweging blijven.

3°. De trage humusstoffen in beweging brengen.

4°. De salpetervorming bevorderen.

5°. Organische zuren en koolzuur voortbrengen. MULDER uit daarbij de meening, dat de bij rotting of gisting vrij wordende ammoniak werkzamer is dan de ammoniak die reeds in den bodem is vastgelegd. IV. 118 en 146.

²⁾ Dit is het verschijnsel der „zucht”, bekend in de Dollardpolders, vooral na overstroming met zeewater. Deze klei verliest dan tijdelijk hare groote vruchtbaarheid.

worden. Zoo heeft men nog lang gemeend, ingeval de analyse betrekkelijk weinig kalk of phosphorzuur in den bodem aantoonde, dat een aanvoer van kalk, van kali, van phosphorzuur dadelijk aangewezen was en heil zou aanbrengen. Of die weinige kali misschien niet in een gunstigen toestand in het gelatineuse silikaat-humaat aanwezig was en eene vermindering van vruchtbaarheid misschien niet aan andere oorzaken was toe te schrijven — b. v. achteruitgang in losheid, vochtigheidstoestand, humusgehalte — daarop werd niet gelet, ja zelfs daarom werd niet gedacht ¹⁾.

D. De mechanische bewerking van den bodem.

De beteekenis van de braak en van de mechanische bewerking van den grond, door ploegen, eggen, omwoelen ²⁾, mag niet eenzijdig opgevat worden als enkel bevordering van verweering der silikaten, waardoor mineraal voedsel in oplossing komt, zooals zulks wel, inzonderheid door LIEBIG, werd voorgesteld ³⁾, in die mate zelfs dat hij beweert, dat de landbouwer door eenige zouten (als $NaCl$, KNO_3 , H_4N zouten) de braak en het omwoelen vervangen kan. Deze zouden dan mineraal voedsel in oplossing brengen.

Terecht vraagt MULDER: wat is er nog verweerbaars, althans in korten tijd, in de reeds eeuwen bebouwde gronden. De eigenlijke kleideeltjes en de geleiachtige silikaten zijn reeds produkten van verweering; die verweering zou dus alleen gelden voor de nog onverweerde brokstukjes der rotsgesteenten, veldspaat, glimmer, hornblende, augiet enz. De tand des tijds knaagt voorzeker daaraan, maar hoe langzaam? De nuttige werkingen van braken, ploegen en omwoelen moeten dus anders verklaard worden.

¹⁾ Ik heb daarvan voor eenige jaren (1890) voorbeelden uit Deli en Java medegedeeld. Deze betroffen niet raadgevingen van mesthandelaars (waarvan velen altijd met een universeelen of een speciefken mest, welke onfeilbaar is, gereed staan) maar van wetenschappelijke proefstations in Duitschland. Gaf de analyse van den bodem waarop tabak wordt geteeld, wat minder kali of kalk of phosphorzuur, fluks werd voorgeschreven kali-kalk-phosphorzuur-mest te geven. Nu is de gerooide boschgrond, die in Deli zoo uitnemenden tabak voortbrengt, van vulkanischen oorsprong en bevat betrekkelijk weinig kali. Het is bewezen dat hare groote vruchtbaarheid, om in den korten groeitijd veel en voortreffelijk tabaksblad voort te brengen, van hare losheid, humusrijkheid en vochtigheidstoestand afhangt (zie mijne onderzoekingen daaromtrent in Landw. Vers. Stat. (1890) 37. S. 375—418. Ueber die Ursachen der Fruchtbarkeit des Urwaldbodens in Deli und Java für die Tabakskultur und der Abnahme dieser Fruchtbarkeit.

²⁾ IV. 192—203. 257—265.

³⁾ LIEBIG beweert bovendien, dat de braak voornamelijk geldt voor de graangewassen en dat een voorraad oplosbaar kiezelzuur nevens de alkaliën eene hoofdvoorwaarde is voor hunnen wasdom. Aardappelen en beetwortelen voeren geen kiezelzuur weg en hebben dus geene behoefte aan braak. MULDER bestrijdt die meening natuurlijk.

Verrijkt zich de bodem daarbij uit de atmosfeer, zonder dat iets weggevoerd wordt, tevens treedt de werking der zuurstof op; die gedesoxydeerde bestanddeelen weder oxydeert en die de organische overblijfselen van een vroeger gewas tot ontleding en tot sterkere chemische beweging brengt. Hij acht het niet onwaarschijnlijk, dat de minerale bestanddeelen houdende humus [hij noemt deze: dubbelhumaten van potasch, kalk, magnesia, soda] die moeilijk ontleedbaar zijn, door de organische beweging, d. i. door de rotting en oxydatie bij het braken en het keeren van den grond, ontleed worden. Zoodoende stellen zij bases beschikbaar voor het geleiachtige silikaat, dat ze opneemt (absorbeert) en daarmede haar vroeger geleden verlies weder aanvult ¹⁾.

Het is dus geen afbreken, maar een opbouwen van het geleiachtige silikaat, dat door braken en keeren bewerkt wordt. Wordt er tevens gemest, dan worden meststoffen en bodem tot een geheel verbonden.

Doch het chemische deel der nuttige uitwerking staat niet op den voorgrond ²⁾. Er is veel meer. Gedaalde bestanddeelen van vroegere bemesting en in het algemeen wat uit den bovengrond opgelost en in den ondergrond vastgelegd is, wordt naar boven gebracht. De kapillaire opzuiging van het water uit den ondergrond naar boven wordt bevorderd. Bovenal wijst MULDER daarop, dat de physische toestand verbeterd wordt en dat insekten en onkruiden vernietigd worden.

E. Wisselbouw.

Betreffende den wisselbouw, die het braken vervangen kan, verklaart MULDER zich alweer tegen eene verklaring, die slechts voor het quantum der minerale bestanddeelen en hunne verhouding oog heeft, dus tegen LIEBIG's dogma ³⁾:

„Auf der ungleichen Menge und Beschaffenheit der mineralischen Nährmittel und dem ungleichen Verhältnisse, in dem sie zur Entwicklung der verschiedenen Pflanzengattungen dienen, beruht die Wechselwirthschaft.“ Die leer kan slechts in beperkte mate gelden.

¹⁾ MULDER ging zeker te ver, als hij hier, zoowel als op andere plaatsen in zijn boek, nog allerlei mogelijkheden stelde, om daaruit verklaringen af te leiden. Zoo b.v. deze: kreen- en apokreen-zuur vormen innige verbindingen met aluinaarde; als nu zulk eene verbinding gedurende het braken en ploegen ontleed wordt, dan komt de vrije aluinaarde, onder den invloed van nieuw gevormd gelatineus kiezelzuur; zij vormt dan eene geleiachtige kiezelzure aluinaarde, die bases opneemt en dus dit deel des bodems vergroot. Evenwel, MULDER stelt slechts de mogelijkheid.

²⁾ IV. 193.

³⁾ IV. 249.

„Ik ga de quantiteitsleer niet geheel voorbij,” zegt MULDER, „maar ik begrijp in haar niet alles” ¹⁾. Bovendien geldt zij niet den gansen voorraad, maar slechts het in het geleiachtige silikaat beschikbare. MULDER geeft zelfs chemische verklaringen in dien zin ten beste ²⁾, die naar het mij voorkomt ook toen wel wat ver gingen ³⁾. Maar buiten de zoo ingewikkelde chemische werkingen, in verband met de verschillende behoeften der planten en den verschillende groei-tijd, wortelontwikkeling enz., bestaan er nog vele andere redenen die voor het nut van den wisselbouw pleiten. Zoo wijst MULDER daarop, dat het eene gewas veel meer overblijfselen nalaat dan het andere en dat eene ontleding daarvan, en vooral eene snellere ontleding, aan een volgend gewas ten goede kan komen. Ook de diepgang der wortels bepaalt den wisselbouw, omdat planten met dieper gaande wortels uit diepere lagen voedsel kunnen trekken en de overblijvende wortels bovendien in hunne ondergeploegde overblijfselen den bovengrond bemesten met hetgeen zij uit den ondergrond geput hebben. In een wisselstelsel moeten gewassen opgenomen zijn die veel bewerking en ook zomerploegen behoeven ⁴⁾.

Want vooral op de onkruiden en parasieten vestigt MULDER het oog. Hij weet dat de eene plant de onkruiden eener andere kan verdelgen. Hij haalt DE CANDOLLE's voorschrift aan: In een wisselstelsel moet een gewas voorkomen, dat door hare schaduw onkruiden schaadt en doet sterven.

MULDER schrijft dus geheel terecht aan den wisselbouw een groote beteekenis toe, wegens den invloed die dezelve heeft op de verdelging van onkruiden en parasieten, zooals ik reeds op blz. 22 heb uiteengezet.

Ten slotte: MULDER is zeer getroffen door BOUSSINGAULT's en VILLE's proeven, die de groote beteekenis bewijzen van de Legumi-

¹⁾ IV. 250.

²⁾ IV. 247.

³⁾ Zij luiden aldus:

De grootere verarming van het gelatineuse deel aan eene basis, door een voorgaand gewas voortgebracht, kan maken, dat eene tweede basis voor een ander gewas, hetwelk van die tweede basis meer heeft, weer beschikbaar wordt, omdat deze in het silikaat betrekkelijk overvloediger wordt.

Eene plant, die veel kiezelzuur uit dit silikaat opneemt, geeft daardoor aanleiding, dat daaruit ook meer bases vrijkomen, die door vlakke-aantrekking teruggehouden voor een volgend gewas beschikbaar zijn.

⁴⁾ Merkwaardig is het, dat MULDER hierbij in het licht brengt waarnemingen als deze: tarwe geeft na aardappelen of beetwortelen geene goede opbrengst, omdat zij dan te laat wordt gezaaid, zoodat de grond in het vochtig najaar niet goed bearbeid kan worden, zooals de tarwe voor zijne wortels zulks verlangt.

mosen in den wisselbouw, in zooverre zij een veel vruchtbaarder bodem voor de granen achterlaten ¹⁾.

Ook dit punt besprak ik reeds op blz. 15—16 als een bewijs van 's mans juiste blik.

F. Ontginning.

Het ontginnen ²⁾ is dus bij MULDER niet het toevoeren van mest, maar het in een geschikten toestand brengen van het gelatineuse bestanddeel, door dit met bases, ammoniak, phosphorzuur te verzadigen en met organische stoffen te verrijken; alles tot opwekking van scheikundig leven. Bevat nu een grond geen in verdunde zuren oplosbaar silikaat en geen goede humus, dan kunnen ook de meststoffen niet helpen, zooals de ervaring leert omtrent schrale nieuwe zandgronden. De regens spoelen de meststoffen weg ³⁾. Men moet silikaat aanbrengen zooals portland-cement, zacht met kalk gebrande klei, of klei met kalk. Vervolgens, als genoeg geleiachtig silikaat aanwezig is, zoo kan dit door een 2000 kilo phosphorzuur, 400 kilo kali, 6—10 duizend kilo kalk, benevens eene hoeveelheid sulfaten (van magnesia en natron) met phosphorzuur en bases verzadigd worden, zoodat een vruchtbare grond gevormd is.

S L O T.

Het boek is kunsteloos uit de pen gevloeid, zonder aanspraak op een schoonen letterkundigen vorm. Het vormt, met uitzondering van sommige gedeelten, geene onderhoudende lektuur, al is het gekruid met die kernachtige en krachtige beelden, waarvan MULDER zich in zijn schrijven pleegt te bedienen — beelden, die hem als man des volks, maar vooral als een krachtigen geest kenschetsen ⁴⁾.

¹⁾ III. 106.

²⁾ IV. 307.

³⁾ Dit wordt thans algemeen erkend. Zoo zegt AD. MAYER: Als de bodem absorberende bestanddeelen mist (dus gelatineuse silikaten en humus) dan helpt de mest weinig en kan zelfs de bodem weinig mest verdragen. Dan moet dikwijls, maar zwak bemest worden. In den natten wintertijd aangebrachte mest wordt door de regens uitgespoeld. Zware bodems kunnen veel mest verdragen (Lehrb. Agr. Ch. II. 1. S. 77—94).

⁴⁾ Enkele voorbeelden:

„Bijaldien het menschelijk geslacht gevoed wordt, zooals LIEBIG het van planten in de toekomst voorspelt”, namelijk met bepaalde voedselrecepten voor elk gewas, „zoo is het in zes jaar op zijn langst uitgestorven en onderwijl ligt elk op zijn bed zijn dood af te wachten”. II. 485.

Het is een studieboek, waarin zeer dikwijls herhalingen voorkomen, niet alleen om op het verband met vorige beschouwingen te wijzen, maar vooral om het gewicht derzelve te versterken. Het bevat eene doorlopende bestrijding van LIEBIG's leeringen en evenzoo eene aanwijzing van LIEBIG's inkonsequentien, leeringen die toen oppermachtig de Agrikultuurchemie, ja, de gansche landbouw-wetenschap beheerschten.

Uit het bovenbeschrevene kan men, zoo ik hoop, eenigszins opmaken in hoeverre MULDER tot die bestrijding recht had.

LIEBIG gaf zijn stelsel in afgeronde leerstukken (dogmata), die volgens zijne overtuiging de landbouw-wetenschap hadden herschapen en haar verder geheel moesten leiden. Voor de verschijnselen gaf hij chemische verklaringen, die den schijn wekten alsof zij nu afdoende verklaard waren, en die dus het verder onderzoek afsloten of althans aan zijne (LIEBIG's) kluisters vastlegden.

MULDER beijvert zich daarentegen de samengesteldheid der vraagstukken in het licht te stellen en haar geenen dogmatischen band aan te leggen. Telkens doet hij de armoede der wetenschap uitkomen. Hij tracht voorzeker veel te verklaren, inzonderheid uit de leer der gelatineuse silikaten — ja soms te veel — maar toch altijd op eene wijze die de vraagstukken niet afsluit, maar openstelt. Op bijna elke bladzijde van zijn boek dringen zijne uiteenzettingen en verklaringen tot nader onderzoek.

Wijst LIEBIG steeds de oude landbouw-praktijk terug, MULDER maakt ze zich ten nutte.

Niet MULDER, maar LIEBIG heeft in Duitschland en elders de richting van het onderzoek beheerscht en eerst langzaam heeft men zich daaraan ontworsteld. Men blijft het echter een groote verdienste van LIEBIG's bemoeiingen achten, dat hij zulk een krachtigen stoot aan de Agrikultuurchemie gegeven en juist door zijne orakelspreuken belangstelling en leven gewekt heeft — een leven, dat het aanzijn gegeven heeft aan die talrijke proefstations, die thans

„Humuszuur is een konservatief beginsel in den bouwgrond; daarom niet passende in dezen liberalen tijd”. II. 442.

Die niet gelooven wil, dat bij het vraagstuk der uitputting des bodems het quantum te sterk wordt uitgesproken en het quale op den achtergrond gedrongen, „hij ete eenige dagen paardenhaar”. III. 408.

„De bodem is geen entrepôt, maar een trafiek”. III. 430.

„LIEBIG's minerale kunstmest is eene eenzijdigheid die ten slotte voor de koele ervaring nedervalt, als een hollend paard voor een muur”. I. Inleiding blz. 8.

Opmerkende, dat het treurig zou gesteld zijn met de versterking van het onkruid, als men naar LIEBIG braken en ploegen naliet, roept M. uit: „Rheum kan geen surrogaat zijn van lichaamsbeweging”, IV. 269. enz. enz. enz.

Duitschland en de andere Germaansche Staten overdekken en ook in Engeland, België en Frankrijk nagevolgd zijn.

ADOLF MAYER ¹⁾ zegt: Die moralische Bedeutung von LIEBIG's Auftreten wird nicht geleugnet werden können, wenn es auch der scharfprüfenden Kritik immer mehr und mehr gelingen sollte, *das eigentliche Greifbare seiner Leistungen* auf dem Gebiete der Agrikulturchemie, das in einem in sich abgeschlossenen Satz fertig dargestellt werden könnte, *in ein Nichts auf zu lösen* ²⁾.

Het komt mij echter voor, dat het veel gelukkiger voor de ontwikkeling der Agrikultuurchemie zoude geweest zijn, als niet LIEBIG's maar MULDER's denkbeelden school gemaakt hadden. De dwalingen van LIEBIG zijn alle moeten wederlegd worden en nog heden ten dage worden zij wederlegd. Zij hebben dus in 't eerst geene gelukkige richting aan het onderzoek gegeven, al heeft, zooals van zelf spreekt, het onderzoek steeds meer licht gebracht en *den goeden weg terug doen vinden*.

Iets dergelijks komt in alle tijdvakken der wetenschap voor. Zoo klaagt DUHEM nog dezer dagen, dat BERTHELOT, die gedurende eene reeks van jaren de chemie en de chemici in Frankrijk beheerscht, door zijne Thermochemische dogma's de studie in verkeerde banen gevoerd heeft. In plaats van aan BERTHOLLET en St. CLAIRE DEVILLE aan te knoopen en de Thermodynamiek van MOUTIER te erkennen, heeft hij in Frankrijk door zijne eenzijdige en apodiktische wetten de ontwikkeling der chemie in physische richting tegengehouden ³⁾, die sinds in Duitschland, Nederland, Zweden op grootsche wijze is verkregen ⁴⁾.

De denkbeelden van MULDER, ofschoon zijn werk in het Hoogduitsch is vertaald ⁵⁾, hebben geringen invloed uitgeoefend. Toch waren zij de betere, zooals uit het boven aangevoerde gebleken is en zooals de lezing van de nieuwste handboeken van Agrikultuurchemie ons leeren kan ⁶⁾. Men kan thans beweren, dat de vooruitgang der Agrikultuur-chemie en -Physiek, al is zij betrekkelijk nog

¹⁾ Lehrb. II. 1. S. 84.

²⁾ Ik kursiveer.

³⁾ Thermochemie à propos d'un livre récent de M. M. BERTHELOT Paris 1897. Une science nouvelle: la Chimie Physique. Bordeaux 1899.

⁴⁾ Wij mogen hierbij voegen, dat Frankrijk sinds de laatste jaren in H. LE CHATELIER en in DUHEM zelven hoogst verdienstelijke vertegenwoordigers en medewerkers der nieuwe richting gevonden heeft.

⁵⁾ In 1861 door I. MULLER.

⁶⁾ B. v. dat van AD. MAYER 1896 en het werk van E. WOLLNY: Die Zersetzung der Organischen Stoffe und die Humusbildungen mit Rücksicht auf die Bodenkultur. 1897. Verder de werken van SCHLÖSING, DÉHERAIN en anderen.

niet groot, in MULDER's niet in LIEBIG's richting heeft plaats gehad. Van een voortgezet onderzoek der gelatineuse deelen des bodems (humus en silikaten) en van het chemisme dat daarin plaats heeft ter eener zijde, en van de meerdere aandacht aan de ervaringen en de regelen der landbouwpraktijk ter anderer zijde, heeft een groot deel van den vooruitgang der landbouwwetenschap afgehangen. Men erkent thans ten volle de waarde van WAY's proefnemingen en verklaringen, op welke (zooals AD. MAYER zegt) de latere onderzoekingen na lange dwaalwegen weder teruggevoerd hebben ¹⁾, omdat zij de grondslag zijn onzer kennis aangaande het chemisme in den bodem.

De studie der vruchtbaarheid en onvruchtbaarheid des bodems beweegt zich op den door MULDER aangewezen weg. Aan de ervaringen van de landbouwpraktijk wordt recht gedaan. Het onderzoek is weder *physiologisch* geworden, zooals MULDER het altijd verlangd heeft. De beteekenis van het leven der parasitische dieren en planten, de rol der mikro-organismen voor den groei der bouwgewassen wordt nagespoord.

MULDER's werk zal in de geschiedenis der wetenschap een boek

¹⁾ De absorbtieproeven, die na 1859 verricht zijn, van PETERS (1860), KNOP (1863 en 1864) enz., zelfs die van KÖNIG (1882), zouden meer licht gebracht hebben, als zij niet onder den invloed van de LIEBIG'sche leeringen hadden gestaan; ook het voortreffelijk onderzoek (1862) van RAUTENBERG, die de gelatineuse silikaten op den voorgrond heeft gesteld, ware meer gewaardeerd geworden (zie v. BEMMELEN Landw. Versuchsstat. 1877. 21. S. 135—150). Mijne onderzoekingen hebben mij tot de uitkomst geleid, dat de gelatineuse humus-komplexen en dat de gelatineuse silikaten (van aluinaarde, ijzeroxyde, enz.) geene chemische verbindingen zijn in bepaalde verhoudingen, maar kolloïdale absorbtieverbindingen in onbepaalde verhoudingen. Zij kunnen in hun kolloïdaal waterhoudend kompleks allerlei stoffen absorbeeren, zoowel phosphorzuur en bases als geheele zouten (de laatste in de zwakste hoeveelheid). Zij kunnen tevens met zoutoplossingen bases uitwisselen. De absorbtie is van dien aard, dat het evenwicht, hetwelk zich instelt tusschen de absorbeerende stof en de oplossing, eene functie is 1° van de natuur en van den (voor wijziging zeer vatbaren) molairen bouw van het kolloïd, 2° van het specifiek absorbtievermogen voor elke stof (K_2O , P_2O_5 enz.), 3° van de concentratie zelve en 4° van de temperatuur. De vorm dier functie is natuurlijk nog geheel onbekend.

Al de waargenomen verschijnselen, ook het ontnemen en het weder teruggeven van het absorbtievermogen aan den bouwgrond, laten zich in overeenstemming brengen met deze voorstelling.

Indien het schrijver dezes is mogen gelukken om analyses van bouwgronden te geven, die eenige theoretische en praktische waarde hebben en indien hij over het absorbtievermogen des bodems eenig nieuw licht heeft mogen verspreiden, dan erkent hij dat de lezing van MULDER's boek in den aanvang zijner onderzoekingen hem geleid en de richting aan zijn onderzoek heeft gegeven.

Zie Das Absorptionsvermögen der Ackererde. L. V. St. (1877). XXI. 135—191. L. V. St. (1878). XXIII. 265—303. L. V. St. (1888). XXXV 69—136, inzonderheid blz. 136. Zeitschr. Anorgan. Chem. (1900). XXIII. 356—370. Die Absorption von Stoffen aus Lösungen.

van groote waarde blijven en aan het nageslacht bewijzen dat in den tijd, toen de Agrikultuurchemie door den machtigen geest van LIEBIG als het ware in zijne eenzijdige leeringen was vastgelegd, MULDER door eene onpartijdige studie van al wat tot 1860 was onderzocht en waargenomen heeft getracht: haar weder vrij te maken en voor het meest veelzijdige onderzoek open te stellen, en voorts die leeringen te niet te doen en betere daarvoor in de plaats te stellen.

Toen MULDER op den leeftijd van 57 jaren het boek had geschreven, begon het einde van zijne wetenschappelijke loopbaan te naderen. Hij is op het onderwerp niet meer teruggekomen. Hij had geene school van jongere chemici meer om zich heen, om de uitgebreide chemische en physische onderzoekingen in te stellen, waarvan de onderwerpen op schier elke bladzijde van zijn boek voor het grijpen lagen. Andere hoofdstukken der chemie, vooral de organische, die welhaast door KEKULÉ tot ongekenden bloei zou gevoerd worden, trokken de aandacht, ook van Nederlandsche scheikundigen, tot zich. MULDER zelf heeft nog in 1863 eene hoogst belangrijke verhandeling over het „*Scheikundig gebonden Water*” geschreven, verschenen in 1864. Hij publiceerde daarin niet alleen een uitgebreid proefondervindelijk materiaal (oplosbaarheidslijnen van een aantal zouten, dubbelzouten enz.), maar gaf ook vele nieuwe denkbeelden ten beste; zoodat deze verhandeling als een voorloopster mag beschouwd worden van de nieuwe beschouwingen over den toestand der zouten in oplossing en van het evenwicht van een of meer zouten met een oplosmiddel — welke beschouwingen een vijfentwintigtal jaren later opkwamen.

In 1865 verscheen ten laatste van zijne hand eene monographie over *Opdroogende olieën*, nevens enkele kleinere onderzoekingen. In 1867 legde hij zijn Professoraat neder, en verliet voor goed Utrecht, waar hij 27 jaren gearbeid had.

Deze verhandeling is geschreven in de lente van 1898 naar aanleiding van een verzoek van Prof. J. W. GUNNING om eene kritisch-historische schets van MULDER'S Scheikunde der Bouwbare aarde op te stellen. GUNNING had zich voorgesteld om na het verkrijgen van zijn emeritaat (in 1898) eene wetenschappelijke biografie van MULDER te bewerken, maar de ziekte, waaraan hij bezweken is, heeft hem daarvoor de kracht benomen.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING	3
HOOFDSTUK I. De theoretische vraagstukken.	
§ 1. Samenstelling van den bodem en het chemisme daarin.	6
§ 2. De voeding der planten.	
<i>a.</i> Opname van het voedsel uit den bodem in opge-	
losten of onopgelosten toestand	12
<i>b.</i> Kunnen organische stoffen tot voedsel dienen?	14
<i>c.</i> Bronnen der stikstofvoeding	15
HOOFDSTUK II. De praktische vraagstukken.	
<i>a.</i> De vruchtbaarheid des akkerbodems	16
<i>b.</i> Het verlies aan vruchtbaarheid; de uitputting	21
<i>c.</i> Herstelling der vruchtbaarheid. Bemesting	23
<i>d.</i> De mechanische bewerkingen van den bodem	26
<i>e.</i> De wisselbouw	27
<i>f.</i> De ontginning	29
SLOT	29



GEDRUKT BIJ
—° JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN °—
HAARLEM